6. FEJEZET

6.1 Alfejezet

1.

	1. vevő	2.vevő	3.vevő	
1. raktár	15	35	25	40
2. raktár	10	50	40	30
Hiány	90	80	110	20
	30	30	30	

2.

	1. vevő	2.vevő	3.vevő	Fiktív	
1. raktár	15	35	25	0	40
2. raktár	10	50	40	0	30
1.R extra	115	135	125	0	20
2.R extra	110	150	140	0	20
	30	30	30	20	

3.

	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	
1NM	7	8	9	10	11	12	0	200
1TM	11	12	13	14	15	16	0	100
2NM	M	7	8	9	10	11	0	200
2TM	M	11	12	13	14	15	0	100
3NM	M	M	7	8	9	10	0	200
3TM	M	M	11	12	13	14	0	100
4NM	M	M	M	7	8	9	0	200
4TM	M	M	M	11	12	13	0	100
5NM	M	M	M	M	7	8	0	200
5TM	M	M	M	M	11	12	0	100
6NM	M	M	M	M	M	7	0	200
6TM	M	M	M	M	M	11	0	100
	200	260	240	340	190	150	420	

4a. Legyen a j-edik acélból az i-edik gyárban gyártott mennyiség x_{ij} tonna. Ekkor az 1-es gyár kínálata 40(60)/20 = 120 tonna, a 2-es gyár kínálata 40(60)/16 = 150 tonna, a 3-as gyáré pedig 40(60)/15 = 160 tonna. A következő kiegyensúlyozott szállítási feladathoz jutunk:

	1. acél	2. acél	3. acél	Fiktív	
1. gyár	60	40	28	0	120
2. gyár	50	30	30	0	150
3. gyár	43	20	20	0	160
	100	100	100	130	

4b. Ebben az esetben nem értelmezhetjük egy gyár termelési kapacitását az előállított acélok tonnáinak összegeként. Ennek az az oka, hogy ugyanabban a gyárban a különböző típusú acélok egy tonnájának előállításához szükséges idők különbözőek. Például az 1-es gyár kínálati korlátját a

$$15x_{11} + 12x_{12} + 15x_{13} \leq 2400,$$

egyenlőtlenség adná meg, ez azonban eltér a szállítási feladat kínálati korlátjának alakjától.

$$(x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq \text{1-es gyár kínálata})$$

5.

	1. hónap	2. hónap	Fiktív	
Daisy	800	720	0	5
Laroach	710	750	0	5
	3	4	3	

6.

	Eladói	Fizetési	Személyi	Fiktív	
1. helyszín	5	4	2	0	10000
2. helyszín	3	4	5	0	6000
	5000	5000	5000	1000	

7. Ez egy maximumfeladat, tehát a cellákban található számok jelentése nem költség, hanem bevétel.

	Cliff	Blake	Alexis	
1. földterület	1,000	900	1,100	100,000
2. földterület	2,000	2,200	1,900	100,000
	0	0	0	40,000
	80,000	80,000	80,000	

8. 1 hordó olaj szállításából a következő nyereség származik:

Az 1. mezőről Angliába: 6 - 3 - 1 = 2$
Az 1. mezőről Japánba: 6.5 - 3 - 2 = 1.50$
A 2. mezőről Angliába: 6 - 2 - 2 = 2$

A 2. mezőről Japánba: 6.5 - 2 - 1 = 3.50$

Mivel mindegyik szállítás nyereséges, ezért az optimális megoldásban 40 millió hordó olajat szállítunk Angliábaa, és 30 millió hordót Japánba. Bevezetünk egy fiktív keresleti pontot 20 millió hordónyi kereslettel, és ezáltal az alábbi kiegyensúlyozott szállítási feladathoz jutunk: (A keresleti és kínálati értékek millió hordóban vannak kifejezve)

	Anglia	Japán	Fiktív	
1. mező	2	1.5	0	40
2. mező	2	3.5	0	50
	40	30	20	

10. Jelöljük x_{ij} –vel azt az időt, ahány órát az i-edik könyvvizsgáló a j-edik projekten dolgozik. Ekkor az alábbi maximumfeladatot kapjuk:

	1.Projekt	2.Projekt	3.Projekt	Fiktív	
1. Kv	120	150	190	0	160
2. Kv	140	130	120	0	160
3. Kv	160	140	150	0	160
	130	140	160	50	

11. Jelölje x_{ij} azt a mennyiséget, ahány tonna i-edik típusú papírmasszára van szükség a j-edik típusú papír készítéséhez. Ekkor az alábbi kiegyensúlyozott szállítási tábla tartozik a feladathoz

	(1)ÚÚP	(2)ÚNRP	(3)ÚRP	Fiktív	
(1)ÚPM	13	M	14	0	500
(2)NRPM	12	9	14	0	200
(3)RPM	M	14	12	0	300
	312.5	352.94	166.67	167.89	

A költségeket az x_{ij} változók segítségével fejezzük ki. A különböző típusú újrafeldolgozott papírok iránti igényeket annak alapján kell meghatározni, hogy hány tonna inputmasszára van szükség a szóbanforgó újrafeldolgozott papír előállításához. Például újrafeldolgozható újságpapírmasszából 250 tonnára van szükség (1. keresleti pont). Az újrahasznosított újságpapírhoz szükséges massza 1 tonnájából (1-0.2) =0.8 tonna újrahasznosított újságpapír állítható elő. Ezért 250/0.8=312.5 tonna masszát kell feldolgozni ahhoz, hogy kielégítsük az igényt. Így az 1-es keresleti pont igénye 312.5. Hasonlóan a 2-es keresleti pont igénye 2=300/.85=352.94, a 3-as keresleti pont igénye pedig 150/.9=166.67.

12a. Helyettesítsük a nagy M-eket egy megfelelő késleltetési költséggel. Például, ha 3. havi gyártással elégítünk ki 1. havi igényt, akkor ennek a költsége 400 + 2(30) = 460$.

12b. Illesszünk be egy új kínálati pontot ("elveszett üzlet" névvel), ahonnan bármelyik havi kínálati ponthoz történő szállítás egységnyi költsége 450$. Az "elveszett üzlet" pont kapacitása legyen azonos teljes kereslettel. Iktassunk be még egy fiktív keresleti pontot, és egyensúlyozzuk ki ezzel a feladatot.

12c. 1. havi gyártás 4. havi kereslet kielégítésére történő felhasználásának költsége M.

12d. Mindegyik hónaphoz iktassuk be az i-edik havi alvállalkozói kínálati pontot. Ennek a kapacitása legyen 10, a költség pedig 440$-ral nagyobb, mint a megfelelő i-edik havi kínálati ponthoz tartozó eredeti költség. Ezután módosítsuk a fiktív keresleti pont igényét úgy, hogy kiegyensúlyozott feladatot kapjunk.

6.2 Alfejezet

1. Az északnyugati sarok módszerrel az 1. feladathoz az alábbi lehetséges bázismegoldást kapjuk:

30	10		40
	20	10	30
		20	20
30	30	30	

Az északnyugati sarok módszerrel a 2. feladathoz az alábbi lehetséges bázismegoldást kapjuk:

	1.vevő	2.vevő	3.vevő	Fiktív	
1.raktár	15 30	35 10	25	0	40
2.raktár	10	50 20	40 10	0	30
1.r.EXTRA	115	135	125 20	0 0	20
2.r.EXTRA	110	150	140	0 20	20
	30	30	30	20	

Az északnyugati sarok módszerrel a 3. feladathoz az alábbi lehetséges bázismegoldást kapjuk:

	H1	H2	H3	H4	H5	H6	Fiktív	
1NM	200							200
1TM	0	100						100
2NM		160	40					200
2TM			100					100
3NM			100	100				200
3TM				100				100
4NM				140	60			200
4TM					100			100

5NM					30	150	20	200
5TM							100	100
6NM							200	200
6TM							100	100
	200	260	240	340	190	150	420	

2. A minimális költség módszerrel a 6.1. alfejezet 4. feladatához az alábbi lehetséges bázismegoldást kapjuk.

60	40	28	0 120	X
50	30	30	0	150
43	20	20	0	160
100	100	100	10	

60	40	28	0 120	X
50	30	30	0 10	140
43	20	20	0	160
100	100	100	X	

60	40	28	0 120	X
50	30	30	0 10	140
43	20	20 100	0	60
100	100	X	X	

60	40	28	0 120	X
50	30	30	0 10	140
43	20 60	20 100	0	X
100	40	X	X	

60	40	28	0 120	X
50	30 40	30	0 10	100
43	20 60	20 100	0	X
100	X	X	X	

60	40	28	0 120	X
50 100	30 40	30	0 10	X
43	20 60	20 100	0	X
X	X	X	X	

A (maximumfeladatra alkalmazott) minimális költség módszerrel a 6.1. alfejezet 7. feladatához a következő lehetséges bázismegoldást kapjuk:

1000	900	1100	100,000
2000	2200	1900	100,000
0	0	0	40,000
80,000	80,000	80,000	

1000	900	1100	100,000
2000	2200 80,000	1900	20,000
0	0	0	40,000
80,000	X	80,000	

1000	900	1100	100,000
2000 20,000	2200 80,000	1900	X
0	0	0	40,000
60,000	X	80,000	

1000	900	1100 80,000	20,000
2000 20,000	2200 80,000	1900	X
0	0	0	40,000
60,000	X	X	

1000 20,000	900	1100 80,000	X
2000 20,000	2200 80,000	1900	X
0	0	0	40,000
40,000	X	X	

1000 20,000	900	1100 80,000	X
2000 20,000	2200 80,000	1900	X
0 40,000	0	0	x
X	X	X	

A minimális költség módszerrel a 8. feladathoz (ami ismét egy maximumfeladat) az alábbi lehetséges bázismegoldást kapjuk:

2	1.5	0	40
2	3.5	0	50
40	30	20	

2	1.5	0	40
2 	3.5 30	0	20
40	X	20	

2 40	1.5	0	X
2	3.5 30	0	20
0	X	20	

2 40	1.5	0	X
2 0	3.5 30	0	20
X	X	20	

2 40	1.5	0	X
2 0	3.5 30	0 20	X
X	X	X	

3. A Vogel-módszerrel a 6.1. alfejezet 5. feladatához a következő lehetséges bázismegoldást kapjuk:

	800	720	0	5	Sor bünt. 720*
	710	750	0	5	710
	3	4	3		
Oszl. Bünt.	90	30	0		

					Sor bünt.
	800	720	0 3	2	80
	710	750	0	5	40
	3	4	X		
Oszl. Bünt.	90*	30	-		

					Sor bünt.
	800	720	0 3	2	-
	710 3	750	0	2	-
	X	4	X		
Oszl. Bünt.	-	30*	-		

					Sor bünt.
	800	720 2	0 3	2	-
	710 3	750	0	2	-
	X	2	X		
Oszl. Bünt.	-	-	-		

					Sor bünt.
	800	720 2	0 3	2	-
	710 3	750 2	0	2	-
	X	X	X		
Oszl. Bünt.	-	-	-		

A Vogel-módszerrel a 6.1. alfejezet 6. feladatához a következő lehetséges bázismegoldást kapjuk (A kapacitások és igények ezer csekkben, a szállítási költségek pedig ezer centben vannak kifejezve).

						Sor Bünt.
	5	4	2	0	10	2
	3	4	5	0	6	3
	5	5	5	1		
Oszl. Bünt.	2	0	3*	0		

						Sor Bünt.
	5	4	2 5	0	5	4*
	3	4	5	0	6	3
	5	5	X	1		
Oszl. Bünt.	2	0	-	0		

						Sor Bünt.
	5	4	2 5	0 1	4	1
	3	4	5	0	6	1
	5	5	X	X		
Oszl. Bünt.	2*	0	-	-		

						Sor Bünt.
	5	4	2 5	0 1	4	-
	3 5	4	5	0	1	-
	X	5	X	X		
Oszl. Bünt.	-	0	-	-		

						Sor Bünt.
	5	4 4	2 5	0 1	X	-
	3 5	4	5	0	1	-
	X	1	X	X		
Oszl. Bünt.	-	-	-	-		

						Sor Bünt.
	5	4 4	2 5	0 1	X	-
	3 5	4 1	5	0	X	-
	X	X	X	X		
Oszl. Bünt.	-	-	-	-		

4. Mindegyik sorban definiáljuk a sorhoz tartozó büntetést, ami = (a sorban szereplő legnagyobb célfüggvény-együttható) - (a sorban a második legnagyobb célfüggvény-együttható). Az oszlopokhoz tartozó büntetéseket hasonló módon értelmezzük. A kihúzott sorokban és oszlopokban lévő költségeket figyelmen kívűl hagyva azt a változót léptetjük be a bázisba, amelyiknek a sorához vagy az oszlopához a legnagyobb büntetés tartozik.

6.3 Alfejezet

1.

Kezdjük a 6.2. alfejezetben kapott lehetséges bázismegoldással

u \ v	15	35	25	
0	15 30	35 10	25	40
15	10	50 20	40 10	30
85	90	80	110 20	20
	30	30	30	

Mivel $\bar{c}_{32}=40$, az x_{32} változót léptetjük be a bázisba. Ez és néhány bázisváltozó a (3, 2) - (2, 2) - (2, 3) - (3, 3) hurkot határozza meg. x_{33} kilép a bázisból, s így a következő lbm adódik

u \ v	15	35	25	
0	15 30	35 10	25	40
15	10	50 0	40 30	30
45	90	80 20	110	20
	30	30	30	

Mivel $\bar{c}_{21}=20$, az x_{21} változó lép be a bázisba. x_{21} és a bázisváltozók a (2,1)-(1,1)-(1,2)-(2,2) hurkot határozzák meg. Miután x_{22} kilép a bázisból, az alábbi lbm adódik:

u \ v	15	35	45	
0	15 30	35 10	25	40
-5	10 0	50	40 30	30
45	90	80 20	110	20
	30	30	30	

Most $\bar{c}_{13}=20$, ezért az x_{13}változót léptetjük be. Ehhez az (1, 3) - (2, 3) - (2, 1) - (1, 1) hurok tartozik. x_{11} kilépése után a következő lbm adódik:

u \ v	-5	35	45	
0	15	35 10	25 30	40
15	10 30	50	40 0	30
	90	80	110	

			11	
45		20		20
	30	30	30	

Ez egy optimális megoldás. Tehát 10 egységet kell szállítani az 1-es raktárból a 2-es vevőhöz, 30 egységet az 1-es raktárból a 3-as vevőhöz, és 30 egységet a 2-es raktárból az 1-es vevőhöz. A 2-es vevő fennmaradó 20 egységnyi igénye kielégítetlen marad.

2.

	1.vevő	2.vevő	3.vevő	Fiktív	
1.raktár	15 30	35 10	25	0	40
2.raktár	10	50 20	40 10	0	30
1.r. extra	115	135	125 20	0 0	20
2.r. extra	110	150	140	0 20	20
	30	30	30	20	

x_{21} belépése és x_{22} kilépése után az eredmény

	1.vevő	2.vevő	3.vevő	Fiktív	
1.raktár	15 10	35 30	25	0	40
2.raktár	10 20	50	40 10	0	30
1.r. extra	115	135	125 20	0 0	20
2.r. extra	110	150	140	0 20	20
	30	30	30	20	

x_{13} belépésekor akár x_{11} –et, akár x_{23} –t kiléptethetjük. Az x_{23} változót választva a következő táblát kapjuk

	1.vevő	2.vevő	3.vevő	Fiktív	
1.raktár	15 0	35 30	25 10	0	40
2.raktár	10 30	50	40	0	30
1.r. extra	115	135	125 20	0 0	20
	110	150	140	0	

			12		
2.r. extra				20	20
	30	30	30	20	

x_{41} belépésével a következő optimális táblát kapjuk:

	1.vevő	2.vevő	3.vevő	Fiktív	
1.raktár	15	35 30	25 10	0	40
2.raktár	10 30	50	40	0	30
1.r. extra	115	135	125 20	0 0	20
2.r. extra	110 0	150	140	0 20	20
	30	30	30	20	

4. A feladatot a hálózati szimplex módszerrel oldjuk meg.

v		50	30	30	0	
u		1.acél	2.acél	3.acél	Fiktív	
0	1. gyár	60	40	28	0 120	120
0	2. gyár	50 100	30 40	30	0 10	150
-10	3. gyár	43	20 60	20 100	0	160
		100	100	100	130	

Mivel $\bar{c}_{13}=2$ az egyetlen pozitív $\bar{c}_{ij}$, beléptetjük az x_{13} változót. Ehhez az (1,3)-(1-4)-(2,4)-(2,2)-(3,2)-(3,3) hurok tartozik. Az x_{22} változó kilépése után az eredmény

v		50	28	28	0	
u		1.acél	2.acél	3.acél	Fiktív	
0	1. gyár	60	40	28 40	0 80	120
0	2. gyár	50 100	30	30	0 50	150
-8	3. gyár	43	20 100	20 60	0	160
		100	100	100	130	

Ez egyí optimális megoldás. Tehát a 2-es gyár 100 tonna 1-es acélt termel, a 3-as gyár 100 tonna 2-es acélt és 60 tonna 3-as acélt állít elő. Az 1-es gyár 40 tonna 3-as acélt készít.

5.

u	v	680 1.hónap	720 2.hónap	0 Fiktív	
0	Daisy	800	720 2	0 3	5
30	Laroach	710 3	750 2	0	5
		3	4	3	

Mivel $\bar{c}_{23}=30$, az x_{23} változó lép be a bázisba. Ehhez a (2,3)-(2,2)-(1,2)-(1,3) hurok tartozik. x_{22} kilépése után az eredmény

u	v	710 1.hónap	720 2.hónap	0 Fiktív	
0	Daisy	800	720 4	0 1	5
0	Laroach	710 3	750	0 2	5
		3	4	3	

Ez egy optimális táblázat. Tehát a 2. hónapban 4 gallont kell vásárolni Daisy-től, az 1. hónapban pedig 3 gallont vásárolunk Laroache-tól.

6.

u	v	3 Eladói	4 Fizetési	2 Személyi	0 Fiktív	
0	1. hely	5	4 4	2 5	0 1	10
0	2. hely	3 5	4 1	5	0	6
		5	5	5	1	

Ez egy optimális megoldás. Tehát mindegyik napon 4,000 fizetési és 5,000 személyi csekket kell feldolgozni az 1. helyszínen. Ugyanakkor a 2. helyszínen naponta 5,000 eladói és 1,000 fizetési csekket kell feldolgozni.

7.

u	v	1,000 Cliff	1,200 Blake	1,100 Alexis	
0	1. hely	1,000 20	900	1,100 80	100
1,000	2. hely	2,000 20	2,200 80	1,900	100
-1,000	Fiktív	0 40	0	0	40
		80	80	80	

Mivel valamennyi $\bar{c}_{ij} \geq 0$, ez a megoldás optimális (ne felejtsük el, hogy ez egy maximumfeladat). Tehát Cliff 20,000 holdat kap mindkét helyszínen, Blake 80,000 holdat a 2-es helyszínen, Alexis pedig 80,000 holdat az 1-es helyszínen.

8.

u	v	England	Japan	Fiktív	
		2	3.5	0	
0	1. mező	40 (2)	(1.5)	(0)	40
0	2. mező	0 (2)	30 (3.5)	20 (0)	50
		40	30	20	

Ez egy optimális megoldás. Tehát 40 millió hordót szállítunk 1-es mezőről Angliába, és 30 millió hordót a 2-es mezőről Japánba.

6.4 Alfejezet

1. x_{14} nem bázisváltozó az optimális megoldásban. Ha c_{14} értékét $(9 + \Delta)$-ra módosítjuk, akkor

$\bar{c}_{14} = 0 + 2 - (9 + \Delta) = -7 - \Delta$.

Tehát akkor marad optimális az aktuális bázis, ha $-7 - \Delta \leq 0$ vagy $\Delta \geq -7$. Ezért az aktuális bázis optimalitásának feltétele $c_{14} \geq 9 - 7 = 2$.

2. x_{34} bázisváltozó az optimális megoldásban. Ha c_{34} értékét $(5 + \Delta)$-ra változtatjuk, akkor

$u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 6$, $v_1 = 6$, $v_2 = 6$, $v_3 = 10$, $v_4 = 2 + \Delta$. Csak x_{14} és x_{24} kiértékelése módosul.

$\bar{c}_{14} = 0 + 2 + \Delta - 9 = \Delta - 7$, $\bar{c}_{24} = 3 + 2 + \Delta - 7 = \Delta - 2$. Tehát optimális marad az aktuális bázis, ha $\Delta \leq 2$ vagy $c_{34} \leq 5 + 2$.

3. x_{23} bázisváltozó az optimális táblázatban. Ezért az új optimális megoldásban nem változnak a változók értékei, kivéve az x_{23} változót, ami 3-mal nő, tehát $x_{23} = 5 + 3 = 8$. z értéke 3(13)-mal nő, tehát az új optimális célfüggvényérték 1020 + 39 = 1059.

4. x_{33} nem bázisváltozó az optimális megoldásban. Az x_{33} változó és a bázisváltozók a (3-3)-(3,2)-(1,2)-(1,3) hurkot határozzák meg. Tehát az új optimális megoldást úgy kapjuk, hogy 2-vvel csökkentjük x_{13} és x_{32} értékét, ugyanakkor x_{12} értékét pedig 2-vel növeljük. Így a következő optimális megoldást kapjuk: $x_{12} = 12$, $x_{13} = 23$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 8$, $x_{34} = 30$, (a többi változó értéke 0). $z = 1020 - 2u_3 - 2v_3 = 1020 - 2(3) - 2(10) = 994$.

5a. A szállítási szimplex módszert alkalmazva a következő optimális táblát kapjuk (z = 950)

1. OPTIMÁLIS MEGOLDÁS

55 10	65 0	80 	0 10	20
10 	15 10	25 10	0 	20
10	10	10	10	

Mivel ez a megoldás degenerált, bevonhatjuk a bázisba az x_{13} változót, s így egy másik optimális megoldást kapunk:

2. OPTIMÁLIS MEGOLDÁS

55 10	65 	80 0	0 10	20
10 	15 10	25 10	0 	20
10	10	10	10	

Ha a 2-es vevő igényét Δ-val növeljük, akkor az 1. optimális megoldás így alakul:

55 10	65 Δ	80 	0 10-Δ	20
10 	15 10	25 10	0 	20
10	10+Δ	10	10-Δ	

$\Delta = 1$ esetén $x_{11} = 10$, $x_{12} = 1$, $x_{14} = 9$, $x_{22} = x_{23} = 10$, $z = 1015$.

Ha a 2-es vevő igényét Δ-val növeljük, akkor a 2. optimális megoldásból

55 10	65 	80 Δ	0 10-Δ	20
10 	15 10+Δ	25 10-Δ	0 	20
10	10+Δ	10	10-Δ	

lesz. $\Delta>0$ esetén ez a táblázat már nem optimális, (x_{12} –t kell beléptetni a bázisba!). Ennek az az oka, hogy a feladat már nem degenerált, és x_{12} beléptetése csökkentené a célfüggvény értékét.

6.5 Alfejezet

1. M költséggel látjuk el a tiltott hozzárendeléseket, és egy fiktív munkával (5. munka) kiegyensúlyozzuk a feladatot. Bármelyik személynek a fiktív munkához történő hozzárendelése 0 költséggel jár.

Munka

		1	2	3	4	5	Sormin.
	1	22	18	30	18	0	0
	2	18	M	27	22	0	0
Személy	3	26	20	28	28	0	0
	4	16	22	M	14	0	0
	5	21	M	25	28	0	0
Oszlopmin.		16	18	25	14	0	

Mivel mindegyik sorminimum 0, kivonjuk az oszlopminimumokat. Így a következő mátrixot kapjuk.

Munka

		1	2	3	4	5
	1	6	0	5	4	0
	2	2	M	2	8	0
Személy	3	10	2	3	14	0
	4	0	4	M	0	0
	5	5	M	0	14	0

Négy vonalra (pl. 1. sor, 4.sor, 3. oszlop, 5. oszlop)van szükség valamennyi 0 lefedéséhez. A le nem fedett elemek minimuma 2, ezért 2-vel csökkentjük a le nem fedett költségeket, és 2-vel növeljük a kétszer lefedett költségeket. Az eredmény

Munka

	1	2	3	4	5
1	6	0	7	4	2
2	0	M	2	6	0

Személy	3	8	0	3	12	0
	4	0	4	M	0	2
	5	3	M	0	12	0

Most már 5 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez, tehát optimális megoldáshoz jutottunk: x_{12}=1, x_{21}=1, x_{35}=1, x_{44}=1, x_{53}=1. A 3. személy nem kapott munkát, és valamennyi munka elvégzésének össz-ideje 18+18+14+25=75 időegység.

2. A magyar módszer alkalmazásával

	Gyors	Mell	Pillangó	Hát
Hall	3	3	0	2
Spitz	0	6	1	1
Montgomery	0	3	4	6
Jastremski	3	1	2	0
Oszlopmin.	0	1	0	0

adódik. A redukált költség mátrix

	Gyors	Mell	Pillangó	Hát
Hall	3	2	0	2
Spitz	0	5	1	1
Montgomery	0	2	4	6
Jastremski	3	0	2	0

alakú. Mindössze három vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez (pl. 1. sor, 4. sor és 1. oszlop). A legkisebb le nem fedett elem 1, ezért 1-gyel csökkentjük a le nem fedett költségeket, és 1-gyel növeljük a kétszeresen lefedett költségeket. Így az alábbi mátrix adódik:

	Gyors	Mell	Pillangó	Hát
Hall	4	2	0	2
Spitz	0	4	0	0
Montgomery	0	1	3	5
	4	0	2	0

Jastremski				

Mivel 4 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez, ezért egy optimális megoldáshoz jutottunk: $x_{13}=1$, $x_{24}=1$, $x_{31}=1$, és $x_{42}=1$. Tehát Hall kapja a pillangóúszást, Spitz-é a hát, Montgomery-é a gyorsúszás, Jastremski pedig mellúszásban indul.

3a. $\max z=7x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 2x_{14} +\ldots + 5x_{41} + 5x_{42} + 6x_{43} + 7x_{44}$

$$
\begin{array}{lll}
\text{f.h} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}\leq 1 & \text{(TS)} \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}\leq 1 & \text{(BR)} \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}\leq 1 & \text{(TG)} \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44}\leq 1 & \text{(JT)} \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}\leq 1 & \text{(ONJ)} \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}\leq 1 & \text{(LA)} \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}\leq 1 & \text{(DP)} \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44}\leq 1 & \text{(GF)} \\
 & x_{ij}\geq 0 &
\end{array}
$$

Ezek a korlátozó feltételek azt biztosítjál, hogy egyik személy se töltsön saját idejének 100%-ánál többet az ellenkező nemű személyekkel. Mivel bármelyik ellenkező nemű személy esetén az eggyütlét örömet okoz, a társadalomnak az az érdeke, hogy mindegyik személy idejének 100%-át használja ki. Ezért feltehetjük, hogy az optimális megoldásban mind a 8 egyenlőtlenség egyenlőségként fog teljesülni.

3b. Mivel tudjuk, hogy mindegyik feltétel egyenlőségként fog teljesülni, egy kiegyensúlyozott szállítási feladatunk van (tulajdonképpen egy kiegyensúlyozott hozzárendelési feladat), és azt is tudjuk, hogy valamennyi változó értéke 0 vagy 1. Ezért az optimális megoldásban pontosan 4 x_{ij} változó értéke lesz 1, a többié pedig 0. Egy ilyen megoldás szerint mindegyik személy egy ellenkező nemű személlyel tölti teljes idejét. Tehát a mi modellünkben a 'házasság' az optimális.

3c. A boldogság mértékét kifejező számokat –l-gyel szorozva minimumfeladathoz jutunk, amit a magyar módszerrel oldunk meg

	ONJ	LA	DP	GF	Sormin.
TS	-7	-5	-8	-2	-8
BR	-7	-8	-9	-4	-9
TG	-3	-5	-7	-9	-9
JT	-5	-5	-6	-7	-7

A sorminimumok kivonása után az alábbi mátrix adódik

	ONJ	LA	DP	GF
TS	1	3	0	6

BR	2	1	0	5
TG	6	4	2	0
JT	2	2	1	0
Oszlopmin.	1	1	0	0

Az oszlopminimumokat kivonva az aktuális oszlop minden eleméből

	ONJ	LA	DP	GF
TS	0	2	0	6
BR	1	0	0	5
TG	5	3	2	0
JT	1	1	1	0

adódik. Három vonal (1. sor, 2. sor és 4. oszlop) elegendő valamennyi 0 lefedéséhez. A legkisebb le nem fedett költség 1, tehát 1-gyel növeljük a kétszer lefedett költségeket, és 1-gyel csökkentjük a le nem fedett költségeket. Az alábbi mátrixhoz jutunk:

	ONJ	LA	DP	GF
TS	0	2	0	7
BR	1	0	0	6
TG	4	2	1	0
JT	0	0	0	0

Most 4 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez. Optimális megoldáshoz jutottunk: $z = 30$, $x_{34} = x_{42} = x_{11} = x_{23} = 1$. Tehát Tom párja Olívia, Burt párja Dolly, Tony-é Genie, és John párja Loni.

4. Az alábbi táblázat adja a költségmátrixot és (*-gal jelölve) az optimális hozzárendelést:

	Munka				
Személy	1	2	3	4	Fiktív
1	50	46	42	40*	0
2	51*	48	44	1000	0
2’	51	48	44*	1000	0
3	1000	47	45	45	0
3’	1000	47	45	45	0

Megjegyzés: az 1000 értékű költség kizárja a tiltott hozzárendelést. Az összköltség értéke 182.

5. A kínálati pontok kapacitásainak minden egységéhez egy kínálati pontot készítünk 1 kapacitással. Ugyanakkor a keresleti pontok igényeinek minden egységéhez egy keresleti pontot készítünk, aminek 1 egység az igénye. Tehát a következő költség mátrixot használjuk:

	K1:1	K2:1	K2:2	K2:3	K2:4	
P1:1	3	1	1	1	1	1
P1:2	3	1	1	1	1	1
P2:1	2	3	3	3	3	1
P2:2	2	3	3	3	3	1
P2:3	2	3	3	3	3	1
	1	1	1	1	1	

Ez a hozzárendelési feladat ekvivalens az eredeti szállítási feladattal.

6a.

	1.Út	2.Út	3.Út	4.Út	Sormin.
1.Vállalat	4	5	M	M	4
2.Vállalat	M	4	M	4	4
3.Vállalat	3	M	2	M	2
4.Vállalat	M	M	4	5	4

(A költségek ezer egységben vannak kifejezve). A sorminimumok kivonása után

	0	1	M	M
	M	0	M	0
	1	M	0	M
	M	M	0	1
Oszlopmin.	0	0	0	0

Adódik. Tehát a redukált költség mátrix a következő

0	1	M	M
M	0	M	0
1	M	0	M
M	M	0	1

Az 1. sor, a 2. sor és a 3. oszlop lefedi valamennyi 0-t. Adjunk 1-et a kétszeresen lefedett költségekhez, és vonjunk ki 1-es a le nem fedett költségekből. Ekkor a következő mátrixot kapjuk

0	1	M	M
M	0	M	0
0	M	0	M
M	M	0	0

Mivel 4 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez, optimális megoldáshoz érkeztünk: $x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 1$, az összköltség pedig 15,000$.

6b.

	1.Út	2.Út	3.Út	4.Út	D1	D2	D3	D4
Vállalat 1	4	5	M	M	0	0	0	0
Vállalat 1’	4	5	M	M	0	0	0	0
Vállalat 2	M	4	M	4	0	0	0	0
Vállalat 2’	M	4	M	4	0	0	0	0
Vállalat 3	3	M	2	M	0	0	0	0
Vállalat 3’	3	M	2	M	0	0	0	0
Vállalat 4	M	M	4	5	0	0	0	0
Vállalat 4’	M	M	4	5	0	0	0	0
Oszlopmin.	3	4	2	4	0	0	0	0

D1-D4 fiktív keresleti pontok. Mivel mindegyik sorminimum értéke 0, az alábbi redukált költségmátrix adódik.

1	1	M	M	0	0	0	0
1	1	M	M	0	0	0	0
M	0	M	0	0	0	0	0
M	0	M	0	0	0	0	0
0	M	0	M	0	0	0	0
0	M	0	M	0	0	0	0
M	M	2	1	0	0	0	0
M	M	2	1	0	0	0	0

8 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez. Ezért optimális megoldáshoz ($x_{3'3}=x_{22}=x_{31}=x_{24}=1$) érkeztünk. Az összköltség értéke 13,000$. Tehát a 3-as vállalat kapja az 1-es és 3-as útvonalat, a 2-es vállalat pedig a 2-es és 4-es útvonalakat.

7. Ha egy cellának a sora és az oszlopa sem szerepel a lefedő vonalak között, akkor a 3. lépés (-k)-t add a cella költségéhez. Ugyanakkor a feladatban leírt műveletek a 0 + (-k) = -k értéket adják a cella költségéhez.

Ha egy cellának a sora nem szerepel a lefedő vonalak között, de az oszlopa igen, akkor a 3. lépés 0-t ad a cella költségéhez. Ugyanakkor a feladatban leírt műveletek a 0 + 0 = 0 értéket adják a cella költségéhez.

Ha egy cellának a sora a lefedő vonalak között szerepel, az oszlopa viszont nem, akkor a 3. lépés 0-t ad a cella költségéhez. Ugyanakkor a feladatban leírt műveletek a k - k = 0 értéket adják a cella költségéhez.

Végül, ha egy cellának a sora és az oszlopa is szerepel a lefedő vonalak között, akkor a 3. lépés k-val növeli a cella költségét. Ugyanakkor a feladatban leírt műveletek a k + 0 = k értéket adják a cella költségéhez.

Tehát mind a négy esetben a 3. lépés a feladatban szereplő 2 művelet egymásutáni végrehajtásával ekvivalens.

8. Nem igaz. Tekintsük a következő hozzárendelési feladatot:

2	3	3
3	80	80
3	90	3

Ennek az optimális megoldása $x_{12} = x_{33} = x_{21} = 1$, $z = 9$. Vegyük észre, hogy c_{11} a legkisebb költség mind az első sorban, mind pedig az első oszlopban. Ennek ellenére, az optimális megoldásban $x_{11} = 0$.

6.6 Alfejezet

1a.

	LA	DET	ATL	HOUS	TAMPA	FIKTÍV	
LA	0	140	100	90	225	0	5100
DET	145	0	111	110	119	0	6900
ATL	105	115	0	113	78	0	4000
HOUS	89	109	121	0	M	0	4000
TAMPA	210	117	82	M	0	0	4000
	4000	4000	4000	6400	5500	100	

1b.

	LA	DET	ATL	HOUS	TAMPA	FIKTÍV	
LA	0	M	100	90	225	0	5100
DET	M	0	111	110	119	0	6900
ATL	105	115	0	113	78	0	4000
HOUS	89	109	121	0	M	0	4000
TAMPA	210	117	82	M	0	0	4000
	4000	4000	4000	6400	5500	100	

1c.

	LA	DET	ATL	HOUS	TAMPA	FIKTÍV	
	0	140	100	90	225	0	5100

LA							
DET	145	0	111	110	119	0	6900
ATL	105	115	0	113	78	0	4000
HOUS	89	109	121	0	5	0	4000
TAMPA	210	117	82	5	0	0	4000
	4000	4000	4000	6400	5500	100	

2. (A kapacitások és igények 1000$-ban vannak kifejezve) Az összkapacités és az összes igény különbsége 50, ezért a fiktív keresleti pont igénye 50. Az alábbi kiegyensúlyozott szállítási táblát kapjuk:

	Mobile	Galv.	NY	LA	Fiktív	Kapacitás
1. Kút	10	13	25	28	0	150
2. Kút	15	12	26	25	0	200
Mobile	0	6	16	17	0	0+350=350
Galv.	6	0	14	16	0	0+350=350
NY	M	M	0	15	0	0+350=350
LA	M	M	15	0	0	0+350
Igény	350	350	140 +350	160 +350	50	

3. Közvetlenül nem tudunk olajat szállítani a kutakból LA-be vagy NY-ba. Ezt úgy érjük el, hogy ezeknek a szállításoknak a költségét M-re állítjuk. A finomítási költségeket beépítve a következő táblához jutunk:

	Mobile	Alv.	NY	LA	Fiktív	Kapacitás
1. Kút	22	23	M	M	0	150
2. Kút	27	22	M	M	0	200
Mobile	0	6	16	17	0	0+350=350
Galv.	6	0	14	16	0	0+350=350
NY	M	M	0	15	0	0+350=350
LA	M	M	15	0	0	0+350
Igény	350	350	140 +350	160 +350	50	

4. Legyen Galveston kapacitása és Galveston igénye egyaránt 150, ugyanakkor Mobile kapacitása és Mobile igénye egyaránt 180. Ekkor az alábbi kiegyensúlyozott szállítási feladathoz jutunk:

	Mobile	Alv.	NY	LA	Fiktív	Kapacitás
1. Kút	22	23	M	M	0	150
2. Kút	27	22	M	M	0	200
Mobile	0	6	16	17	0	180
Galv.	6	0	14	16	0	150
NY	M	M	0	15	0	0+350=350
LA	M	M	15	0	0	0+350
Igény	350	350	140 +350	160 +350	50	

5. Az optimális tábla a következő:

	DENV	NY	LA	CHIC	PHIL	Fiktív	
DET	1253 20	637 130	10000	10000	10000	0	150
ATL	1398 60	841	10000	10000	10000	0 40	100
DENV	0 170	10000	1059 80	996	1691	0	250
NY	10000	0 120	2786	802 70	100 60	0	250
	250	250	80	70	60	40	

6a.

Hónap

1	2	3	4	5	6	Fiktív
0	0	0	0	0	0	0

Kp.								150
1. kötv.	.21	.19	.17	.13	.09	.05	0	200
2. kötv.	.5	.5	.5	.33	0	0	0	100
3. kötv.	1	1	1	1.3	1	0	0	400
	200	100	50	80	160	140	120	

6b. (a költségek centben vannak megadva)

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	H1	H2	H3	H4	H5	H6	Fikt.	
KT1	21	19	17	13	9	5	M	M	M	M	M	M	0	200
KT2	50	50	50	33	0	0	M	M	M	M	M	M	0	100
KT3	1	1	1	1.3	1	0	M	M	M	M	M	M	0	400
C1	0	0	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	0	1000
C2	M	0	0	M	M	M	5	0	M	M	M	M	0	850
C3	M	M	0	0	M	M	10	5	0	M	M	0	0	850
C4	M	M	M	0	0	M	15	10	5	0	M	M	0	850
C5	M	M	M	M	0	0	20	15	10	5	0	M	0	850
C6	M	M	M	M	M	0	25	20	15	10	5	0	0	850
	850	850	850	850	850	850	200	100	50	80	160	140	120	

Egy Ct-ből C(t+1)-be történő szállítás azt jelenti, hogy egy a t-edik hónap elején meglévő pénzösszeg még a (t+1)-edik hónap elején is rendelkezésre áll. Egy Kti-ből Ct-be történő szállítás azt jelenti, hogy az i-edik kötvényt a t-edik hónap elején eladják. Egy Ct-ből Ht'-be történő szállítás azt az összeget jelenti, melyet a t-edik havi készpénzből a t' hónapban jelentkező igény kielégítésére költöttek. Megjegyezzük, hogy bármelyik csúcson összesen legfeljebb 850$ pénzösszeg szállítható keresztül.

6. Fejezet, Áttekintő feladatok

1. Az észak-nyugati sarok módszerrel az alábbi lbm-t kapjuk. Megemlítjük, hogy a fiktív kínálati pontból bármelyik vevőhöz történő szállítás kielégítetlen vevői igényt jelent:

	1. Vevő	2. Vevő	3. Vevő	
Gyár 1	75 50	60	69	50
Gyár 2	79 30	73 70	68	100
Gyár 3	85	76 20	70 30	50
Fiktív	0	0	0 70	70
	80	90	100	

x_{13} belép a bázisba.

	1. Vevő	2. Vevő	3. Vevő	
Gyár 1	75 20	60	69 30	50
Gyár 2	79 60	73 40	68	100
Gyár 3	85	76 50	70	50
Fiktív	0	0	0 70	70
	80	90	100	

Most x_{31} lép be a bázisba.

	1. Vevő	2. Vevő	3. Vevő	
Gyár 1	75 20	60	69 30	50
Gyár 2	79 10	73 90	68	100
Gyár 3	85 50	76	70	50
Fiktív	0	0	0 70	70
	80	90	100	

Ez egy optimális tábla.

2. Egy fiktív munka beillesztése után a következő költségmátrixot kapjuk:

	10	15	10	15	0
	12	8	20	16	0
	12	9	12	18	0
	6	12	15	18	0
	16	12	8	12	0
Oszl. Min.	6	8	8	12	0

Az oszlopminimumok kivonása után az alábbi mátrixot kapjuk.(mindegyik sorminimum 0)

4	7	2	3	0
6	0	12	4	0
6	1	4	6	0
0	4	7	6	0

10	4	0	0	0

Valamennyi 0-t lefedhetjük négy vonallal. (Pl. az 1., 2. és 5. oszlop és az 5. sor segítségével). A legkisebb le nem fedett költség 2, tehát

4	7	0	1	0
6	0	10	2	0
6	1	2	4	0
0	4	5	4	0
12	6	0	0	2

Adódik. Ebben a mátrixban 5 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez, tehát optimális megoldáshoz jutottunk. Az 1. munkás végzi a 3. munkát, a 2. munkás a 2. munkát, a 4. munkás az 1. munkát, az 5. munkás a 4. munkát végzi, a 3. munkásnak pedig nem jut munka. Összesen 36 munkaórára van szükség.

3. A Vogel módszer a következő lbm-et adja:

	Jan.	Feb.	Márc.	Fiktív	Kapac.	Sor bünt.
Jan.	400	420	440	0	35	400
Feb.	425	420	440	0	30	420
Már.	420	415	410	0	35	410
Igény	30	30	20	20		

Oszlop bünt.	20	5	30	0		
	Jan.	Feb.	Márc.	Fiktív	Kapac.	Sor bünt.
Jan.	400	420	440	0	35	20
Feb.	425	420	440	0 20	10	5
Már.	420	415	410	0	35	5
Igény	30	30	20	X		

Oszlop bünt.	20	5	30	-		
	Jan.	Feb.	Márc.	Fiktív	Kapac.	Sor bünt.
Jan.	400	420	440	0	35	20
Feb.	425	420	440	0 20	10	5
Már.	420	415	410 20	0	15	5
Igény	30	30	X	X		

	Jan.	Feb.	Márc.	Fiktív	Kapac.	Sor bünt.
Oszlop bünt.	20	5	-	-		
Jan.	400 30	420	440	0	5	-
Feb.	425	420	440	0 20	10	-
Már.	420	415	410 20	0	15	-
Igény	X	30	X	X		

	Jan.	Feb.	Márc.	Fiktív	Kapac.	Sor bünt.
Oszlop bünt.	-	5	-	-		
Jan.	400 30	420	440	0	5	-
Feb.	425	420	440	0 20	10	-
Már.	420	415 15	410 20	0	X	-
Igény	X	15	X	X		

	Jan.	Feb.	Márc.	Fiktív	Kapac.	Sor bünt.
Oszlop bünt.	-	0	-	-		
Jan.	400 30	420	440	0	5	-
Feb.	425	420 10	440	0 20	X	-
Már.	420	415 15	410 20	0	X	-
Igény	X	5	X	X		

	Jan.	Feb.	Márc.	Fiktív	Kapac.	Sor bünt.
Oszlop bünt.	-	-	-	-		
Jan.	400 30	420 5	440	0	X	-
Feb.	425	420 10	440	0 20	X	-
Már.	420	415 15	410 20	0	X	-
Igény	X	X	X	X		

A duálváltozók értékei: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = -5$, $v_1 = 400$, $v_2 = 420$, $v_3 = 415$, and $v_4 = 0$.

Valamennyi $\bar{c}_{ij} \leq 0$, tehát optimális megoldáshoz jutottunk.

3.c. A januári keresletet 30 egységnyi januári termeléssel elégítjük ki. A februári keresletet 5 egységnyi januári termelésből, 10 egységnyi februári termelésből és 15 egységnyi márciusi termelésből elégítjük ki. A márciusi igény kielégítése 20 egységnyi márciusi termeléssel történik.

4.

	Por.	Konyha	Fürdő	Ált.	Fiktív	Sor min.
1. takarítónő	6	5	2	1	0	0
2. takarítónő	9	8	7	3	0	0
3. takarítónő	8	5	9	4	0	0
4. takarítónő	7	7	8	3	0	0
5. takarítónő	5	5	6	4	0	0
Oszlop min.	5	5	2	1	0	

Az oszlopminimumok kivonása után

	Por.	Konyha	Fürdő	Ált.	Fiktív
1. takarítónő	1	0	0	0	0
2. takarítónő	4	3	5	2	0
3. takarítónő	3	0	7	3	0
4. takarítónő	2	2	6	2	0
5. takarítónő	0	0	4	3	0

adódik. Az 1., 3. és 5. sorok az 5. oszloppal együtt lefedik valamennyi 0-t.

Vonjunk ki 2-t valamennyi le nem fedett költségből, és adjunk 2-t valamennyi kétszer lefedett költséghez:

	Por.	Konyha	Fürdő	Ált.	Fiktív
1. takarítónő	1	0	0	0	2
2. takarítónő	2	1	3	0	0
3. takarítónő	3	0	7	3	2
4. takarítónő	0	0	4	0	0
5. takarítónő	0	0	4	3	2

Most 5 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez. Ezért optimális megoldáshoz jutottunk (a 3. takarítónőé a konyha, az 5. takarítónő porszívózik, a 4. takarírónő nem kap feladatot, a 2.-é az általános rendrakás, és az 1. takarítónőé a fürdőszoba). Az összes munkaidő 15 óra.

5. Jelölje x_{ij} az i-edik adattárolón tárolt j-edik típusú file-ok száma. Ekkor a következő kiegyensúlyozott szállítási feladathoz jutunk:

	SZÖV.	PROG.	ADAT	FIKTÍV	
MEREV.	40	16	8	0	200
MEM.	16	4	2	0	100
	80	32	12	0	

SZALAG			30		300
	300	100	100	100	

Például a 40-es költség abból adódik, hogy ha egy szövegszerkesztő file-t tárolunk a merevlemezen, akkor ezt havonta 8-szor kell megkeresni, és mindegyik megkeeséshez 5 percre van szükség. Ezért havonta 8*5 = 40 percet fordítunk arra, hogy megkeressünk egy szövegszerkesztő file-t egy merevlemezen. Az optimális tábla a következő:

	SZÖV.	PROG.	ADAT	FIKTÍV	
MEREV.	40 200	16 0	8	0	200
MEM.	16 100	4	2	0	100
SZALAG	80	32 100	12 100	0 100	300
	300	100	100	100	

Ezek szerint 200 szövegszerkesztő filet kell tárolni a merevlemezen, 100-at a számítógép memóriájában, 100 programcsomagot valamint 100 adatfile-t pedig szalagon.

6. Két fiktív “hívás” beiktatása után a következő költség-mátrixot kapjuk:

	1.Hívás	1.Hívás	1.Hívás	Fiktív1	Fiktív2	Sor min.
Autó 1	10	11	18	0	0	0
Autó 2	6	7	7	0	0	0
Autó 3	7	8	5	0	0	0
Autó 4	5	6	4	0	0	0
Autó 5	9	4	7	0	0	0
Oszl. Min.	5	4	4	0	0	

A sorminimumok mindegyike 0. Az oszlopminimumok kivonása után az alábbi költségmátrixhoz jutunk:

	1.Hívás	1.Hívás	1.Hívás	Fiktív1	Fiktív2
Autó 1	5	7	14	0	0
Autó 2	1	3	3	0	0
Autó 3	2	4	1	0	0
Autó 4	0	2	0	0	0
Autó 5	4	0	3	0	0

Négy vonallal (4. és 5. oszlop, 4. és 5. sor) lefedhetjük az összes 0-t. A legkisebb le nem fedett költség 1, tehát

	1.Hívás	1.Hívás	1.Hívás	Fiktív1	Fiktív2
Autó 1	4	6	13	0	0
Autó 2	0	2	2	0	0
Autó 3	1	3	0	0	0
Autó 4	0	2	0	1	1
Autó 5	4	0	3	1	1

Most már 5 vonalra van szükség valamennyi 0 lefedéséhez, tehát optimális megoldást kaptunk. Egy optimális párosítás a következő: az 5-ös autó megy a 2-es hívás helyszínére, a 4-es autó az 1-es híváshoz, a 3-aas autó pedig a 3-as hívás helyszínére megy. A 2-es és 4-es autók nem mennek ki egyik hívásra sem. Az össztávolság értéke 14.

7.

	W1	B1	W2	B2	W3	B3	Kapacitás
W1	0	M	3	M	5	M	210
B1	M	0	M	3	M	5	120
W2	3	M	0	M	4	M	210
B2	M	3	M	0	M	4	30
W3	5	M	4	M	0	M	180
B3	M	5	M	4	M	0	150
Igény	200	100	200	100	200	100	

Egy egységnyi Wi-ből Wj-be történő szállítás azt jelenti, hogy az i-edik körzetből egy fehér tanuló a j-edik körzetbe jár. Egy egységnyi Bi-ből Bj-be történő szállítás azt jelenti, hogy az i-edik körzetből egy fekete tanuló a j-edik körzetbe jár. A M költségek biztosítják, hogy Wi-ből Bj-be illetve Bi-ből Wj-be ne legyen szállítás.

8. Az észak-nyugati módszerrel a következő lbm-t kapjuk:

	12	14	17	-1	
0	12 40	14 20	16	0	60
-1	14	13 50	19	0	50
1	17	15 0	18 10	0 30	40
	40	70	10	30	

Mivel $\bar{c}_{13}=1$, az x_{13} változót bevesszük a bázisba. Az új táblázat a következő:

	12	14	16	-1	
0	12 40	14 10	16 10	0	60
-1	14	13 50	19	0	50
1	17	15 10	18	0 30	40
	40	70	10	30	

Ez egy optimális tábla.

9. Ez a feladat az alábbi kiegyensúlyozott szállítási feladattal ekvivalens:

v	2	3

u	2	3	
0	3	1	4
	4	3	
0		5	5
	3	6	

Ez egy optimális tábla. Az eredeti LP optimális meogoldása: x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 5.

10. Az észak-nyugati sarok módszer a következő (optimális) lbm-t adja

v	4	2	-2	
u	4	2	4	
0	10	5		15
	12	8	4	
6		5	10	15
	10	10	10	

Az optimális megoldás célfüggvényértéke z = 10(4) + 5(2) + 5(8) + 10(4) = 130.

11. s_1=16 és d_3=11 esetén az észak-nyugati sarok módszerrel

v	4	2	-2	
u	4	2	4	
0	10	6		16
	12	8	4	
6		4	11	15
	10	10	11	

adódik. Mivel az előző bázis lehetséges marad, ezért a bázis most is optimális. A célfüggvény új értéke: z = 10(4) + 6(2) + 4(8) + 11(4) = 128
Tehát most összesen 31 egységet szállítunk (30 helyett) 2$-ral olcsóbban! Ennek az az oka, hogy s_1 1-gyel történő növelése miatt egy egységet átirányíthatunk x_{22} –től x_{12} –höz (megtakarítva ezáltal 6$-t), ugyanakkor +1 egységet szállítunk x_{23} segítségével (4$-nyi költséggel). Így a nettó megtakarítás 6-4=2$. Felhasználva azt a tényt, hogy egy LP feladatban az árnyékárakat $-\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ koordinátái adják, láthatjuk, hogy az s_1 korlátozó feltételhez tartozó árnyékár 0, a d_3 korláthoz tartozó árnyékár pedig 2. s_1 és d_3 módosítása után optimális maradt az eredeti bázis, ezért az új célfüggvényérték z = 130 - 1(0) - 1(2) = 128.

12. Az észak-nyugati sarok módszerrel a következő lbm adódik:

20	11	3	6	
3	2			5
5	9	10	2	
	1	9		10

18	7	4 3	1 12	15
3	3	12	12	

A minimális költség módszer az alábbi lbm-t adja:

20	11	3 5	6	5
5 3	9 3	10 4	2	10
18	7	4 3	1 12	15
3	3	12	12	

Vogel módszerével a következő lbm-t kapjuk:

20	11	3 5	6	5
5 3	9	10	2 7	10
18	7 3	4 7	1 5	15
3	3	12	12	

13.

20	11	3 5	6	5
5 3	9	10	2 7	10
18	7 3	4 7	1 5	15
3	3	12	12	

14. Mindegyik kapacitás értéke 100,000 hordóban van kifejezve.

	DALL	HOUS	NY	CHIC	FIKTÍV	Kapacitás
LA	1000	1010	M	M	0	4
SD	1120	1000	M	M	0	5
DALL	0	M	450	550	0	9
HOUS	M	0	470	530	0	9
Igény	9	9	3	4	2	

15. x_{24} nembázis változó az optimális megoldásban.

Ha c_{24} értékét $(7 + \Delta)$-ra módosítjuk, akkor $\bar{c}_{24} = 3 + 2 - (7 + \Delta) = -2 - \Delta$. Az aktuális bázis optimális marad, ha $\Delta \geq -2$ vagy $c_{24} \geq 5$.

16. x_{23} bázisváltozó az optimális megoldásban. Ha c_{23} értékét $(13 + \Delta)$-ra módosítjuk, az új u_i' és v_j' duálváltozók értéke:
$u_1 = 0$, $u_2 = 3 +$, $u_3 = 3$, $v_1 = 6 - \Delta$, $v_2 = 6$, $v_3 = 10$, $v_4 = 2$. Eszerint

$\bar{c}_{11} = -2 - \Delta$, $\bar{c}_{14} = -7$, $\bar{c}_{22} = \Delta - 3$, $\bar{c}_{24} = \Delta - 2$,

$\bar{c}_{31} = -\Delta - 5$, $\bar{c}_{33} = -3$.

Tehát optimális marad az aktuális bázis, ha $-2 \leq \Delta \leq 2$ vagy $11 \leq c_{23} \leq 15$.

17a.

	MEMP	MILW	NY	DEN	SF	
ATL	371 5	761	841	1398	2496	5
BOS	1296 1	1050	206 4	1949 1	3095	6
CHIC	530	87 4	802	996	2142	4
LA	1817	2012	2786	1059 1	379 2	3
	6	4	4	2	2	

$z = 8089$

17b. A döntési változók értékei nem változnak.

18. A megfelelő tábla a következő:

	1. igény	2.igény	3.igény	Fiktív	
1. termelés	200	300	400	0	240
2.termelés	240	180	280	0	240
3.termelés	360	300	240	0	240
	200	300	100	120	

19. Az alábbi táblázattal oldható meg a feladat (maximalizálunk):

	1.munka	2.munka	3.munka	4.munka	Kapacitás
1. típusú személy	1	1	-M	-M	20
2. típusú személy	-M	1	1	-M	30
3.típusú	-M	-M	1	1	

személy					40
4.típusú Személy	1	-M	-M	1	20
Hiány	0	0	0	0	10
Igény	30	30	40	20	

1" egységnyi jutalmat adunk, ha egy személy olyan munkát kap, amit el tud végezni, ugyanakkor (–M)-mel díjazzuk azt, ha egy személy olyan munkát kap, amit nem tud elvégezni. Az "1"-et tartalmazó cellák száma lesz azon személyek száma, akik elfogadható munkát kaptak.

20. Az alábbi táblában kell maximalizálni:

	1. havi igény	2. havi igény	
1. havi termelés	20-12	16-12-1	50
2. havi termelés	-M	16-15	50
Fiktív	0	0	20
	60	60	

21. Egy adott nap (j-edik nap) igényét kétféleképpen elégíthetjük ki

1. Újonnan vásárolt asztalkendővel, melyet most használunk először
2. Olyan asztalkendővel, amit már használtunk a k-adik napon, és kellő időben megérkezik a tisztítóból ahhoz, hogy a j-edik napon is használhassuk.

Tehát a következő kínálati pontokkal dolgozunk:
Új = újonnan vásárolt asztalkendők, melyeket most használunk először (legfeljebb 15 + 12 + 18 + 6 = 51). Az új pont kapacitása 51.
1.nap = az első napon használt asztalkendők, melyeket később is használhatunk (ennek a pontnak a kapacitása 15)
2. nap = a 2. napon használt asztalkendők, melyeket később is használhatunk (ennek a pontnak a kapacitása 12)
3. nap = a 2. napon használt asztalkendők, melyeket később is használhatunk (ennek a pontnak a kapacitása 18).

Az alábbi kiegyensúlyozott szállítási feladathoz jutunk (az optimális megoldást is megadjuk).

	1.nap	2.nap	3.nap	4.nap	Fiktív	
Új	20 15	20 3	20	20	0 33	51
1. nap	M	10 9	6 6	6	0	15
2. nap	M	M	10 12	6	0	12
3. nap	M	M	M	10 6	0 12	18
	15	12	18	6	45	

Tehát az 1.napi igényt 15 újonnan vásárolt asztalkendővel elégítjük ki. A 2.napon 3 új asztalkendőt és 9 olyat használunk, melyeket az 1. napon használtunk, és a gyorstisztítóval tisztíttattunk. A 3 napon használt asztalkendők közül 6-ot használtunk az 1. napon, és ezeket a lassú tisztítóval tisztíttattuk, továbbá 12-t használtunk a 2. napon, és ezeket a gyorstisztítóval tisztíttattuk. A 4. napon 6 olyan asztalkendőt használunk, melyeket használtunk már a 3. napon, és ezeket a gyorstisztítóval tisztíttattuk.

22. Legyen x_{ij} = 1, ha a személyzet egy tagja az i-edik járaton megy NY-ból Chic-ba, és a j-edik járaton repül Chic-ból NY-ba, legyen továbbá x_{ij} = 0 egyébként. A c_{ij} “költség” az adott járat-kombinációhoz tartózkodó állásidő. Ekkor a következő költségmátrix adódik:

	1	2	3	4	5	6	7
1	M	M	3	6	8	10	11
2	M	M	2	5	7	9	10
3	M	M	M	3	5	7	8
4	2*	M	M	1	3	5	6
5	4*	1*	M	M	1	3	4
6	6*	3*	M	M	M	1	2
7	8*	5*	2*	M	M	M	M

M olyan járatkombinációt jelöl, amelyik nem valósulhat meg. *-gal jelöljük a Chicago-ban lakó személyzettel működő reggel 6-10-ig Chicago-ból NY-ba repül, majd 4 óra állásidő után délután 2-4-ig NY-ból Chicago-ba. Ennek a hozzárendelési feladatnak az optimális megoldása 2 Chicago-ban lakó személyzettel dolgozik, az össz-állásidő minimális értéke 25 óra. Az egyik személyzet az 1-es járattal repül Chicago-ból NY-ba és a 4-es járattal NY-ból Chicago-ba. A másik személyzet az 2-es járattal repül Chicago-ból NY-ba és a 7-es járattal NY-ból Chicago-ba. 5 New York-ban lakó személyzet az alábbi kombinációk szerint repül:

NY-Chicago 1-es Járat és Chicago-NY 3-as Járat
NY-Chicago 2-es Járat és Chicago-NY 4-es Járat
NY-Chicago 3-as Járat és Chicago-NY 5-ös Járat
NY-Chicago 5-ös Járat és Chicago-NY 6-os Járat
NY-Chicago 6-os Járat és Chicago-NY 7-es Járat

23.

	C1	C2	C3	E3	E4	
1. telep	65	63	62	62	64	3
2. telep	68	67	65	65	62	5
3. telep	63	60	59	59	60	5
Fiktív	-M	-M	-M	0	0	3
	4	3	3	3	3	

Az igényeket ezer egységben fejeztük ki. Az össz-termelési kapacitás 13,000, az elkötelezett igények összege 10,000, ezért legfeljebb 13,000-10,000=3,000 megmaradt egységet lehet

szállítani a 3. és 4. vevőhöz. (Maximumfeladattal van dolgunk!)
C1 = az 1. vevőhöz kötelezően szállítandó mennyiség
C2 = a 2. vevőhöz kötelezően szállítandó mennyiség
C3 = a 3. vevőhöz kötelezően szállítandó mennyiség
E3 = a 3. vevőhöz szállítható megmaradt termék mennyisége (legfeljebb 3000)
E4 = a 3. vevőhöz szállítható megmaradt termék mennyisége (legfeljebb 3000)
A feladat kiegyensúlyozása céljából beiktatunk egy fiktív pontot. A fiktív pontból nem szállíthatunk C1-be, C2-be és C3-ba, mert ez azt jelentené, hogy a cég valamelyik kötelezettségének nem tesz eleget (a táblázatban ezt a –M költségek biztosítják).

24.

	M1P	M1S	M2P	M2S	M3P	M3S	
1. hó	2	2	1	1	0	0	35
2. hó	-M	-M	2	2	1	1	35
3. hó	-M	-M	-M	-M	3	3	35
FIKTÍV	-M	0	-M	0	-M	0	5
	20	15	15	20	25	15	

Maximumfeladatot írtunk fel, ezért a –M költségek biztosítják, hogy az igények időben legyenek kielégítve.

Vegyük észre, hogy a fiktív pontból elsődleges igények kielégítése nincs engedélyezve.
M1P = 1. havi elsődleges igény
M1S = 1. havi másodlagos igény, stb.
M1 = 1. havi termelés, stb.
Egy "szállítás" nettó nyeresége= egységnyi eladási ár – egységnyi termelési költség – egységnyi raktározási költség

25. Alakítsuk át a feladatot minimumfeladattá. Iktassunk be egy fiktív festményt. Az 1. vevő két képet is megvehet, ezért neki két kínálati pontja van, 1 és 1'.

	K1	K2	K3	K4	Fiktív	Sor min.
V1	-8	-11	0	0	0	-11
V1'	-8	-11	0	0	0	-11
V2	-9	-13	-12	-7	0	-13
V3	-9	0	-11	0	0	-11
V4	0	0	-12	-9	0	-12

A sorminimumok kivonása után

	K1	K2	K3	K4	Fiktív
V1	3	0	11	11	11
V1'	3	0	11	11	11
V2	4	0	1	6	13
V3	2	11	0	11	11
V4	12	12	0	3	12
Oszl. Min.	2	0	0	3	11

adódik. Az oszlopminimumok kivonása után

	K1	K2	K3	K4	Fiktív
V1	1	0	11	8	0
V1’	1	0	11	8	0
V2	2	0	1	3	2
V3	0	11	0	8	0
V4	10	12	0	0	1

adódik. A 4. és 5. sorok valamint a2. és 5. oszlopok lefedik valamennyi 0-t.
Vonjunk ki 1-et minden le nem fedett költségből, és adjunk 1-es minden kétszer lefedett költséghez

	K1	K2	K3	K4	Fiktív
V1	0	0	10	7	0
V1’	0	0	10	7	0
V2	1	0	0	2	2
V3	0	12	0	8	1
V4	10	13	0	0	2

A következő optimális hozzárendelést kapjuk: x_{44}=1, x_{33}=1, x_{22}=1, $x_{1'1}$=1, and x_{15}=1. Tehát az 1-es vevő veszi meg az 1-es festményt, a 2-es vevő a 2-es festményt, a 3-as vevő a 3-ast, és a 4-es vevő pedig a 4-est. Az összbevétel értéke 8+13+11+9=41$.

26. Feltételezzük, hogy a költségek mindig év elején jelentkeznek. 11 1/9% diszkont-rátával számolva egy minden év elején (örökké) jelentkező 1$ költség jelenértéke 10$ (ma). Megoldunk egy szállítási feladatot, melyben három gyár szerepel, ezek: NY, CHIC, és LA. A költségeket a 0 időpontra diszkontálva:

Teljes szállítási és termelési költség = 14,537,000$
A gyárak teljes működtetési költsége = 1,500,000$
Összköltség = 16,037,000$

Az Atlantai gyárra vonatkozó költségek a következők:

Teljes szállítási és termelési költség = $9,789,500
A gyár teljes működtetési költsége = $2,000,000
Építési költség = $3,000,000
Összköltség = $14,789,500

A Houstoni gyárra vonatkozó költségek

Teljes szállítási és termelési költség = $9,924,000
A gyár teljes működtetési költsége = $2,000,000
Építési költség = $3,000,000
Összköltség = $14,924,000

Egy Houstoni és egy Atlantai gyár esetén,

Teljes szállítási és termelési költség = $7,450,000
A gyárak teljes működtetési költsége = $2,500,000

Építési költség = $6,000,000
Összköltség = $15,950,000

Ezek szerint a minimális költséget úgy érjük el, hogy Atlantában építünk egy új gyárat, Hopustonban viszont nem.

27. Használjuk a feladat leírásában bevezetett xij változókat. A következő hozzárendelési feladatot kapjuk:

	1	2	3	4
1	500	400	350	325
2	400	500	400	350
3	400	400	500	400
4	350	350	400	500

Ennek a feladatnak az optimális megoldása: x13 = x24 = x31 = x42 = 1. Tehát három jegyet vásárolhatunk 30% kedvezménnyel, és egy jegyet 20% kedvezménnyel. Az összköltség értéke 1450$.

28. (-1)-gyel való szorzással minimumfeladatot kapunk

	De 9	De 10	De 11	Du 1	Du 2	Du 3	Sor min.
P1	-8	-7	-6	-5	-7	-6	-8
P1’	-8	-7	-6	-5	-7	-6	-8
P2	-9	-9	-8	-8	-4	-4	-9
P2’	-9	-9	-8	-8	-4	-4	-9
P3	-7	-6	-9	-6	-9	-9	-9
P3’	-7	-6	-9	-6	-9	-9	-9

A sorminimumok kivonása után

	De 9	De 10	De 11	Du 1	Du 2	Du 3
P1	0	1	2	3	1	2
P1’	0	1	2	3	1	2
P2	0	0	1	1	5	5
P2’	0	0	1	1	5	5
P3	2	3	0	3	0	0
P3’	2	3	0	3	0	0
Oszl. min.	0	0	0	1	0	0

adódik.

Vonjuk ki az oszlopminimumokat.

	De 9	De 10	De 11	Du 1	Du 2	Du 3
P1	0	1	2	2	1	2
P1’	0	1	2	2	1	2
P2	0	0	1	0	5	5
P2’	0	0	1	0	5	5
P3	2	3	0	2	0	0
P3’	2	3	0	2	0	0

Az 1., 2. és 4. oszlop valdeint az 5. és 6. sor lefedi aldeennyi 0-t. Növeljük 1-gyel akétszer lefedett költségeket, és vonjunk ki 1-et a le nem fedett költségekből.

	De 9	De 10	De 11	Du 1	Du 2	Du 3
P1	0	1	1	2	0	1
P1’	0	1	1	2	0	1
P2	0	0	0	0	4	4
P2’	0	0	0	0	4	4
P3	3	4	0	3	0	0
P3’	3	4	0	3	0	0

Most hat vonal szükséges valamennyi 0 lefedéséhez. Az optimális megoldás: $x_{66} = 1$, $x_{15} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{53} = 1$. Tehát az 1. Professzor de. 9-kor és du 2-kor tart órát, a 2. Professzor de. 10-kor és du. 1-kor, a 3. Professzor pedig de. 11-kor és du 3-kor.

29. Az ij kínálati pont az i-edik tűzoltótársaság j-edik autóját jelöli. Az ij keresleti pont azt jelöli, hogy a j-edik autó vonul ki az i-edik tűzhöz. Mindegyik kapacitás illetve igény értéke 1.

	11	12	21	22	31	32	33
11	36	24	49	21	81	72	45
12	36	24	49	21	81	72	45
13	36	24	49	21	81	72	45
21	30	20	56	24	99	88	55
22	30	20	56	24	99	88	55
31	36	24	63	27	90	80	50
32	36	24	63	27	90	80	50

Ez a táblázat a a költségek valódi értékét tartalmazza, hiszen egy adott tűz esetén a korábbi kivonulás nagyobb költséggel jár, mint egy későbbi. Például az optimális megoldásban nem fordulhat elő, hogy egy autó,amelyik 6 perc alatt ér a helyszínre, korábban érkezzen az adott tűzhöz, mint az a másik, amelyik 4 perc alatt ért volna ugyanoda. (Ha ugyanis felcserélnénk a két hozzárendelést, akkor csökkenne a költség, és ugyanazok az autók lennének bevethetők a többi esetnél.)
A (b) esetben előfordulhatna, hogy egy hozzárendelésnél t12<t11, ekkor azonban inkorrekt költségek adódhatnának.