8. FEJEZET

8.2 Alfejezet

1. Legyen $x_i = 1$ ha az i játékos kezd, $x_i = 0$ különben. Ekkor a következő IP alkalmas a kezdőcsapat kiválasztására:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7 \\
\text{f.h.} \quad & x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 4 \quad \text{(védők)} \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 2 \quad \text{(bedobók)} \\
& x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \quad \text{(center)} \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 5 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 \geq 10 \quad \text{(labdakez.)} \\
& 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 \geq 10 \quad \text{(dobás)} \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 10 \quad \text{(lepattanó)} \\
& x_6 + x_3 \leq 1 \\
& -x_4 - x_5 + 2 \leq 2y \quad \text{(Ha } x_1>0 \text{ akkor } x_4 + x_5 \geq 2\text{)} \\
& x_1 \leq 2(1-y) \\
& x_2 + x_3 \geq 1 \\
& x_1, x_2, \ldots x_7, y \text{ mind 0-1 változók}
\end{aligned}
$$

2. Legyen x_i = az i. helyen megtisztított vízmennyiség (tonna)
$y_i = 1$ ha épül szennyvíztisztító az i. helyszínen
$y_i = 0$ különben
Ekkor a következő IP egy alkalmas modell:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 100{,}000y_1 + 60{,}000y_2 + 40{,}000y_3 + 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \\
\text{f.h.} \quad & .40x_1 + .25x_2 + .20x_3 \geq 80{,}000 \quad \text{(1-es szennyezőanyag)} \\
& .30x_1 + .20x_2 + .25x_3 \geq 50{,}000 \quad \text{(2-es szennyezőanyag)} \\
& x_1 \leq My_1 \\
& x_2 \leq My_2 \\
& x_3 \leq My_3 \\
& \text{minden } x_{ij} \geq 0 \text{ , és minden } y_i = 0 \text{ vagy } 1.
\end{aligned}
$$

$M = (1/.20)(80{,}000) = 400{,}000$ egy megfelelő korlát, mivel legfeljebb 400,000 tonna vizet kell megtísztítani ahhoz, hogy az előírt mennyiségeket mindkét típusú szennyezőanyagból kiszűrjék.

3. Legyen x_i = a gyártott darabszám az i termékből
$y_i = 1$ ha valamennyi is készül az i termékből
$y_i = 0$ különben
Ekkor a következő IP egy alkalmas modell:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 5x_2 - 10y_1 - 20y_2 \\
\text{f.h.} \quad & 3x_1 + 6x_2 \leq 120 \\
& x_1 \leq 40y_1 \\
& x_2 \leq 20y_2 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ y_1, y_2 = 0 \text{ vagy } 1
\end{aligned}
$$

4. Az ($x_2 + x_3 = 2$ esetén legyen $x_4 = 1$) követelmény ekvivalens azzal, hogy ($x_2 + x_3 - 1 > 0$ esetén legyen $x_4 - 1 \geq 0$). A könyvbeli (28) és (29) alapján tehát egészítsük ki a modellt az alábbi feltételekkel ($M = 1$ megfelelő választás):

$$
\begin{aligned}
& 1 - x_4 \leq y \\
& x_2 + x_3 - 1 \leq (1 - y) \qquad y = 0 \text{ vagy } 1
\end{aligned}
$$

5a. Azt akarjuk, hogy $x_2>0$ esetén legyen $x_1\geq 1$. A könyvbeli (28) és (29) alapján tehát egészítsük ki a modellt az alábbi feltételekkel (M = 1 megfelelő választás):

$$1 - x_1 \leq y$$
$$x_2 \leq (1 - y)$$
$$y = 0 \text{ vagy } 1$$

Egy másik megoldás: $y_1 \geq y_2$.

5b. Azt akarjuk, hogy $x_1\geq 1$ $(1-x_1\leq 0)$ és/vagy $x_2\geq 1$ $(1-x_2\leq 0)$ teljesüljön. A könyvbeli (26') és (27') alapján tehát

$$1 - x_1 \leq y$$
$$1 - x_2 \leq (1-y)$$
$$y = 0 \text{ vagy } 1.$$

Egy másik megoldás: $y_1 + y_3 \geq 1$.

6. $y_1 = 1$ ha felveszi az Analízist
$y_1 = 0$ különben
$y_2 = 1$ ha felveszi az Operációkutatást
$y_2 = 0$ különben
$y_3 = 1$ ha felveszi az Adatstruktúrák kurzust
$y_3 = 0$ különben
$y_4 = 1$ ha felveszi az Üzleti statisztikát
$y_4 = 0$ különben
$y_5 = 1$ ha felveszi a Számítógépes szimulációt
$y_5 = 0$ különben
$y_6 = 1$ ha felveszi a Számítógépes programozást
$y_6 = 0$ különben
$y_7 = 1$ ha felveszi az Előrejelzés kurzust
$y_7 = 0$ különben

Ekkor a következő modell megfelelő:

$$\min z = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$
$$\text{f.h.} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_7 \geq 2 \text{ (matek)}$$
$$y_2 + y_4 + y_5 + y_7 \geq 2 \text{ (opkut)}$$
$$y_3 + y_5 + y_6 \geq 2 \text{ (számtech)}$$
$$y_4 \leq y_1$$
$$y_5 \leq y_6$$
$$y_3 \leq y_6$$
$$y_7 \leq y_4$$
$$y_1, y_2, \ldots y_7 = 0 \text{ vagy } 1$$

7. Ha $x=300$, akkor $z_1=0.4$, $z_2=0.6$, $y_1=1$, a többi változó $=0$.
Ha $x=1200$, akkor $z_1 = z_2 = y_1 = y_2 = 0$, $y_3=1$, $z_3=0.6$, $z_4=0.4$.

8.
$$\max z = 15{,}000z_2 + 27{,}000z_3 + 77{,}000z_4 + 8000z_2' + 56{,}000z_3' + 80{,}000z_4'$$
$$\text{f.h.} \quad 6z_2 + 10z_3 + 15z_4 + 4z_2' + 12z_3' + 15z_4' \leq 20$$
$$z_1 \leq y_1 \ , \ z_2 \leq y_1+y_2 \ , \ z_3 \leq y_2+y_3 \ , \ z_4 \leq y_3$$
$$z_1' \leq y_1' \ , \ z_2' \leq y_1'+y_2' \ , \ z_3' \leq y_2'+y_3' \ , \ z_4' \leq y_3'$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \ , \ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$$
$$y_1' + y_2' + y_3' = 1 \ , \ z_1' + z_2' + z_3' + z_4' = 1$$
$$\text{minden } y_i \text{ és } y_i' = 0 \text{ vagy } 1 \ , \ \text{minden } z_i \text{ és } z_i' \geq 0$$

Az IJ hirdetések száma $6z_2 + 10z_3 + 15z_4$, az FS hirdetéseké pedig $4z_2' + 12z_3' + 15z_4'$.

9. Vegyük fel az

$$x = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \quad \text{és} \quad y_i = 0 \text{ vagy } 1$$

feltételeket. Ezesetben $x = i$ akkor és csak akkor, ha $y_i = 1$.

10. Elérendő, hogy $x+y-3 \le 0$ vagy $2x+5y-12 \le 0$ vagy mindkettő teljesüljön. A könyvbeli (26') és (27') alapján vegyük fel az

$$x + y - 3 \le Mz$$
$$2x + 5y - 12 \le M(1-z)$$
$$z = 0 \text{ vagy } 1$$

feltételeket, ahol M egy kellően nagy szám.

11. Azt akarjuk, hogy $x<3$ $(3-x>0)$ esetén $y\le 3$ $(3-y\ge 0)$ teljesüljön. A könyvbeli (28) és (29) mintájára egészítsük ki a modellt az alábbiakkal:

$$y - 3 \le Mz$$
$$3 - x \le (1-z)M$$
$$z = 0 \text{ vagy } 1,$$

ahol M egy kellően nagy szám.

12. Legyen $y_1 = 1$ ha raktár lesz New Yorkban, $y_2 = 1$ ha raktár lesz Los Angelesben, $y_3 = 1$ ha raktár lesz Chicagoban, $y_4 = 1$ ha raktár lesz Atlantában. Egyénként pedig $y_i = 0$ ha nem lesz raktár az i városban. Jelölje x_{ij} az i városban lévő raktárból a j régióba szállított egységek számát.

$$\min z = 400y_1 + 500y_2 + 300y_3 + 150y_4 + 20x_{11} + 40x_{12} + 50x_{13} + 48x_{21} + 15x_{22} + 26x_{23} + 26x_{31} + 35x_{32} + 18x_{33} + 24x_{41} + 50x_{42} + 35x_{43}$$

f.h. $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \ge 80$, $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \ge 70$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \ge 40$, $x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 100y_1$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 100y_2$, $x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 100y_3$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 100y_4$, $y_1 \le y_2$, $y_2 + y_4 \ge 1$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2$

minden $x_{ij}\ge 0$, minden $y_i = 0$ vagy 1.

13. Legyen x_i = az i gyártósoron dolgozók száma
$y_i = 1$ ha az i gyártósor működik, $y_i = 0$ különben.

$$\min z = 1000y_1 + 2000y_2 + 500x_1 + 900x_2$$

f.h.
$$20x_1 + 50x_2 \ge 120$$
$$30x_1 + 35x_2 \ge 150$$
$$40x_1 + 45x_2 \ge 200$$
$$x_1 \le 7y_1$$
$$x_2 \le 7y_2$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ y_1=0 \text{ vagy } 1,\ y_2=0 \text{ vagy } 1$$

14a. Legyen $x_i = 1$ ha az i lemezt használják, $x_i = 0$ különben.

$$\min z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 + 3x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10}$$

f.h. $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_8 + x_9 \ge 1$ (1-es fájl)

$x_1 + x_3 \ge 1$ (2-es fájl)

$x_2 + x_5 + x_7 + x_{10} \geq 1$ (3-as fájl)

$x_3 + x_6 + x_8 \geq 1$ (4-es fájl)

$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 1$ (5-ös fájl)

$x_i = 0$ vagy 1 (i=1,2,...10)

14b. A megkötés: ha $x_3 + x_5 > 0$, akkor $x_2 \geq 1$.

A megoldás: $1 - x_2 \leq 2y$

$x_3 + x_5 \leq 2(1 - y)$

y=0 vagy 1

(mivel $x_3 + x_5 = 2$ előfordulhat, legalább M=2 kell)

15. Legyen P = a gyártott Pear számítógépek száma, A = a gyártott Apricot számítógépek száma. Legyen $y_1 = 1$ ha gyártanak Pear-t, $y_1 = 0$ ha nem gyártanak Pear-t, és $y_2 = 1$ ha gyártanak Apricot-ot, $y_2 = 0$ ha nem gyártanak Apricot-ot.

max $z = 400P + 900A - 5000y_1 - 7000y_2$

f.h. $P + 2A \leq 1200$, $2P + 5A \leq 3000$

$P \leq 1200y_1$, $A \leq 600y_2$

$A, P \geq 0$ egészek, y_1 , $y_2 = 0$ vagy 1

16. Legyen H = az épített házak száma, A = az épített apartmanok (lakások) száma. Továbbá, legyen $y_1 = 1$ ha a kikötő megépül, $y_1 = 0$ különben, és $y_2 = 1$ ha a sportkomplexum megépül, $y_2 = 0$ különben.

max $z = 48A + 46H - 40A - 40H - 1200y_1 - 2800y_2$

(ezer dollárban jelenértéken számolva)

f.h. $A + H \leq 10000$, $y_1 + y_2 = 1$

$3A - H \leq 30000y_3$, $y_1 \leq 30000(1 - y_3)$

$A, H \geq 0$ egészek, $y_i = 0$ vagy 1

(M = 30000-t választottuk, mivel $3A - H \leq 30000$ mindig fennáll.)

17. Legyen Xi = az i gépen gyártott termékegységek száma

Yi = 1 ha az i gépet használják, Yi = 0 ha nem.

A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MIN 1000 Y1 + 920 Y2 + 800 Y3 + 700 Y4 + 20 X1 + 24 X2 + 16 X3
    + 28 X4
  SUBJECT TO
         2) - 900 Y1 + X1 <=   0
         3) - 1000 Y2 + X2 <=   0
         4) - 1200 Y3 + X3 <=   0
         5) - 1600 Y4 + X4 <=   0
         6)   X1 + X2 + X3 + X4 =    2000

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      37000.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000       1000.000000
        Y2         0.000000        920.000000
        Y3         1.000000      -4000.000000
        Y4         0.000000        700.000000
        X1       800.000000          0.000000
```

```
        X2         0.000000          4.000000
        X3      1200.000000          0.000000
        X4         0.000000          8.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)       100.000000          0.000000
        3)         0.000000          0.000000
        4)         0.000000          4.000000
        5)         0.000000          0.000000
        6)         0.000000        -20.000000
```

18. Legyen Xi = az elkészített i könyvek száma,
Yi = 1 ha készül i könyv, Yi = 0 ha nem készül.
A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MAX  - 80000 Y1 - 50000 Y2 - 60000 Y3 - 30000 Y4 - 40000 Y5
     + 25 X1 + 20 X2 + 23 X3 + 14 X4 + 18 X5
  SUBJECT TO
         2) - 5000 Y1 + X1 <=   0
         3) - 4000 Y2 + X2 <=   0
         4) - 3000 Y3 + X3 <=   0
         5) - 4000 Y4 + X4 <=   0
         6) - 3000 Y5 + X5 <=   0
         7)   X1 + X2 + X3 + X4 + X5 <=   10000

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      75000.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000      80000.000000
        Y2         1.000000      50000.000000
        Y3         0.000000      60000.000000
        Y4         0.000000      30000.000000
        Y5         0.000000      40000.000000
        X1      5000.000000        -25.000000
        X2      4000.000000        -20.000000
        X3         0.000000        -23.000000
        X4         0.000000        -14.000000
        X5         0.000000        -18.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         0.000000          0.000000
        4)         0.000000          0.000000
        5)         0.000000          0.000000
        6)         0.000000          0.000000
        7)      1000.000000          0.000000
```

19. Legyen Xi = az i üzemben gyártott számítógépek száma (ezer darabban megadva), és Yi = 1 ha az i üzem termel, Yi = 0 ha nem termel.
A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MAX -9 Y1 - 5 Y2 - 3 Y3 - Y4 + 2.5 X1 + 1.8 X2 + 1.2 X3 + 0.6
X4
  SUBJECT TO
         2)   X1 + X2 + X3 + X4 <=   20
         3) - 10 Y1 + X1 <=   0
```

```
         4) - 8 Y2 + X2 <=   0
         5) - 9 Y3 + X3 <=   0
         6) - 6 Y4 + X4 <=   0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      25.60000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000        -10.000000
        Y2         1.000000         -4.600000
        Y3         0.000000         -2.400000
        Y4         1.000000          1.000000
        X1        10.000000          0.000000
        X2         8.000000          0.000000
        X3         0.000000          0.000000
        X4         2.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.600000
        3)         0.000000          1.900000
        4)         0.000000          1.200000
        5)         0.000000          0.600000
        6)         4.000000          0.000000
```

20. Legyen AB = 1 ha az ügynök az A és B körzeteket kapja, stb. A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MAX 63 AB + 76 AC + 50 BD + 85 BE + 63 CD + 77 DE + 92 DG
  + 74 EF + 89 FG + 71 BC + 39 DF
SUBJECT TO
  2)   AB + AC + BD + BE + CD + DE + DG + EF + FG + BC + DF = 2
  3)   AB + AC <=   1
  4)   AB + BD + BE + BC <=   1
  5)   AC + CD + BC <=   1
  6)   BD + CD + DE + DG + DF <=   1
  7)   BE + DE + EF <=   1
  8)   DG + FG <=   1
  9)   EF + FG + DF <=   1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)     177.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        AB          .000000        -63.000000
        AC          .000000        -76.000000
        BD          .000000        -50.000000
        BE         1.000000        -85.000000
        CD          .000000        -63.000000
        DE          .000000        -77.000000
        DG         1.000000        -92.000000
        EF          .000000        -74.000000
        FG          .000000        -89.000000
        BC          .000000        -71.000000
        DF          .000000        -39.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)          .000000           .000000
        3)         1.000000           .000000
```

```
        4)          .000000          .000000
        5)         1.000000          .000000
        6)          .000000          .000000
        7)          .000000          .000000
        8)          .000000          .000000
        9)         1.000000          .000000
```

21. Legyen xij = az i városban a j régió számára gyártott légkondicionálók száma (ezer darabban megadva) (ahol i = 1 New York, j = 1 Kelet, stb.). Továbbá, legyen yi = 1 ha termel az i városban lévő üzem, yj = 0 különben.
Ekkor a következő IP megfelelő (a célfüggvény értéke ezer dollárban értendő):

min z = 6000y1 + 5500y2 + 5800y3 +6200y4 + 206x11 + 225x12
 + 230x13 +290x14 + 225x21 + 206x22 + 221x23 + 270x24 + 230x31
 + 221x32 + 208x33 + 262x34 + 290x41 + 270x42 + 262x43 + 215x44

f.h. x11 + x21 + x31 + x41 ≥ 100 (Kelet)
x12 + x22 + x32 + x42 ≥ 150 (Dél)
x13 + x23 + x33 + x43 ≥ 110 (Észak)
x14 + x24 + x34 + x44 ≥ 90 (Nyugat)
x11 + x12 + x13 + x14 ≤ 150y1 (New York)
x21 + x22 + x23 + x24 ≤ 150y2 (Atlanta)
x31 + x32 + x33 + x34 ≤ 150y3 (Chicago)
x41 + x42 + x43 + x44 ≤ 150y4 (Los Angeles)

(Vagy x13≥50 vagy x23≥50 vagy mindkettő)
50 - x13 ≤ 50y
50 - x23 ≤ 50(1 - y)

minden xij egész; y és minden yi = 0 vagy 1

22. Legyen Xi = 1 ha az i-edik szót kiválasztjuk, Xi = 0 ha nem.
A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MAX   X1 + 7 X2 + 9 X3 + 4 X4 + 9 X5 + 4 X6 + 6 X7 + 9 X8
  SUBJECT TO
      2)   X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 =    4
      3)   2 X1 - X2 - 3 X3 - X5 - X6 + 2 X7 + X8 >=   0

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)     31.000000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1          .000000         -1.000000
        X2         1.000000         -7.000000
        X3          .000000         -9.000000
        X4          .000000         -4.000000
        X5         1.000000         -9.000000
        X6          .000000         -4.000000
        X7         1.000000         -6.000000
        X8         1.000000         -9.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)          .000000          .000000
        3)         1.000000          .000000

 NO. ITERATIONS=      13
 BRANCHES=    1 DETERM.=  1.000E    0
```

23. Legyen Xij = 1 ha az i gépen végzik a j munkát, és Xij = 0 különben. Továbbá, legyen Yi = 1 ha az i gépet beüzemelik, Yi = 0 ha nem.
A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MIN  42 X11 + 70 X12 + 93 X13 + 85 X22 + 45 X23 + 58 X31
 + 37 X34 + 58 X41 + 55 X43 + 38 X45 + 60 X52 + 54 X54
 + 30 Y1 + 40 Y2 + 50 Y3 + 60 Y4 + 20 Y5
SUBJECT TO
         2)   X11 + X31 + X41 =    1
         3)   X12 + X22 + X52 =    1
         4)   X23 + X43 + X13 =    1
         5)   X34 + X54 =    1
         6)   X45 =    1
         7)   X11 + X12 - 3 Y1 + X13 <=   0
         8)   X22 + X23 - 2 Y2 <=   0
         9)   X31 + X34 - 2 Y3 <=   0
        10)   X41 + X43 + X45 - 3 Y4 <=   0
        11)   X52 + X54 - 2 Y5 <=   0

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)     345.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11          .000000         42.000000
       X12          .000000         70.000000
       X22          .000000         85.000000
       X23          .000000         45.000000
       X31          .000000         58.000000
       X34          .000000         37.000000
       X41         1.000000         58.000000
       X43         1.000000         55.000000
       X45         1.000000         38.000000
       X52         1.000000         60.000000
       X54         1.000000         54.000000
        Y1          .000000         30.000000
        Y2          .000000         40.000000
        Y3          .000000         50.000000
        Y4         1.000000         60.000000
        Y5         1.000000         20.000000
       X13          .000000         93.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)          .000000          .000000
        3)          .000000          .000000
        4)          .000000          .000000
        5)          .000000          .000000
        6)          .000000          .000000
        7)          .000000          .000000
        8)          .000000          .000000
        9)          .000000          .000000
       10)          .000000          .000000
       11)          .000000          .000000
```

24. Legyen az 1-es helyszín = Evansville, a 2-es helyszín = Indianapolis, a 3-as helyszín = South Bend. Legyen x_{ij} = az i helyszínen a j vásárló számára évente sütött veknik száma (százezer darabban megadva). Legyen y_i = 1 ha megépítik a

sütödét az i helyszínen, $y_i = 0$ ha nem.
Vegyük észre, hogy az évenkénti 1 $ költség ekvivalens 10 $ jelenbeni költséggel.
A modell a következő (a célfüggvény értéke jelenértéken számolva millió dollárban értendő):

$$\min z = 5y_1 + 4y_2 + 4.5y_3 + 0.16x_{11} + 0.34x_{12} + 0.26x_{13} + 0.4x_{21} + 0.3x_{22} + 0.35x_{23} + 0.45x_{31} + 0.45x_{32} + 0.23\,x_{33}$$

f.h. $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7$, $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4$, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 9y_1$, $x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 9y_2$, $x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 9y_3$

minden $x_{ij} \ge 0$, és minden $y_i = 0$ vagy 1

Az optimális megoldás: Evansvilleben és Indianapolisban épüljön sütöde és menjen
-- az 1-es vásárlóhoz 700,000 vekni Evansvilleből,
-- a 2-es vásárlóhoz 400,000 vekni Indianapolisból,
-- a 3-as vásárlóhoz 200,000 vekni Evansvilleből és 100,000 vekni Indianapolisból.

Ha Evansvilleben vagy South Bendben legalább 800,000 veknit kellene sütni évente, a modell kiegészülne a következő feltételekkel:

$$800 - x_{11} - x_{12} - x_{13} \le 800y_4 , \quad 800 - x_{31} - x_{32} - x_{33} \le 800(1 - y_4)$$
$$y_4 = 0 \text{ vagy } 1$$

25. Legyen 1-es régió = SE, 2-es régió = NE, 3-as régió = FW, 4-es régió = MW. Továbbá legyen FF = 1-es bank, R = 2-es bank, PF = 3-as bank, B = 4-es bank. Jelölje x_{ij} = a j bankból az i régióba naponta küldött csekkek számát. Legyen $y_j = 1$ ha a j bank működik, $y_j = 0$ ha nem működik.

$$\max z = 1.05x_{11} + 0.30x_{12} + 0.90x_{13} + 0.75x_{14} + 1.2x_{21} + 0.60x_{22} + 0.75x_{23} + 0.45x_{24} + 0.60x_{31} + 1.2x_{32} + 0.30x_{33} + 1.65x_{34} + 0.75x_{41} + 0.60x_{42} + 1.05x_{43} + 0.75x_{44} - 50{,}000y_1 - 40{,}000y_2 - 30{,}000y_3 - 20{,}000y_4$$

f.h. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40{,}000$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60{,}000$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30{,}000$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 50{,}000$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 90{,}000y_1$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 90{,}000y_2$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \le 90{,}000y_3$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \le 90{,}000y_4$

minden $x_{ij} \ge 0$, minden $y_j = 0$ vagy 1

A célfüggvény megértéséhez vegyük észre, hogy ha $x_{11} = 1$, akkor minden nap 7 $ marad a bankban és kamatozik a társaságnak. Az $x_{11} = 1$ eset tehát éves szinten 7(0.15) = 1.05 dollárt fiadzik a társaságnak. Ez magyarázza a célfüggvénybeli $1.05x_{11}$ tagot.

26. Legyen x_{ij} = ha az i város a j körzetbe tartozik, $x_{ij} = 0$ különben. Továbbá legyen $y_j = 1$ ha a republikánusok nyerik a j körzetet, $y_j = 0$ különben. Jelölje r_i az i városbeli republikánusok, míg d_i a demokraták számát.

$j=10$

$$\min z = \sum_{j=1} y_j$$

$$\text{f.h.} \quad \sum_{i=1}^{i=10} x_{ij}(r_i + d_i) \geq 150{,}000 \qquad j = 1,2,3,4,5$$

$$\sum_{i=1}^{i=10} x_{ij}(r_i + d_i) \leq 250{,}000 \qquad j = 1,2,3,4,5$$

$$\sum_{j=1}^{j=5} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,...,10$$

Biztosítandó, hogy ha $\sum_{i=1}^{i=0} x_{ij}(r_i - d_i)>0$, akkor $y_j = 1$,
vegyük fel még az alábbi feltételeket:

$$1-y_j \leq 250{,}000 z_j \qquad j = 1,2,3,4,5$$

$$\sum_{i=1}^{i=10} x_{ij}(r_i - d_i) \leq 250{,}000(1 - z_j) \qquad j = 1,2,3,4,5$$

mindegyik változó 0 vagy 1.

27. Legyen $x_i = 1$ ha az i városban van szervíz, ahol i = 1 Bostont, i = 2 New Yorkot, i =3 Philadelphiát, i =4 Washingtont jelenti.
Legyen $z_j = 1$ ha a j város 150 mérföldes körzetében van szerviz, ahol j = 1 Bostont, j = 2 New Yorkot, j = 3 Philadelphiát, j = 4 Washingtont, j = 5 Providence-t, j = 6 Atlantát jelenti.
Mivel a másolónkénti profit 500 $,

maximalizálandó

$$z = 700(500)z_1 + 500(500)(1 - z_1) + 1000(500)z_2 + 750(500)(1 - z_2) + 900(500)z_3 + 700(500)(1 - z_3) + 800(500)z_4 + 450(500)(1 - z_4) + 400(500)z_5 + 200(500)(1 - z_5) + 450(500)z_6 + 300(500)(1 - z_6) - 80{,}000(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

f.h. $1 - x_1 \leq y_1$, $z_1 \leq 1-y_1$

$1 - x_2 - x_3 \leq y_2$, $z_2 \leq 1 - y_2$

$1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq y_3$, $z_3 \leq 1 - y_3$

$1 - x_3 - x_4 \leq y_4$, $z_4 \leq 1 - y_4$

$1 - x_1 \leq y_5$, $z_5 \leq 1 - y_5$

$1 - x_2 - x_3 \leq y_6$, $z_6 \leq 1 - y_6$

mindegyik x_i, y_j, z_j változó 0-1.

A feltételek biztosítják, hogy ha $z_j = 1$ vagyis a célfüggvényben a j városbeli eladások magasabb száma szerepel, akkor legyen szerviz a j város 150 mérföldes körzetében.

28. A megfelelő szállítási feladatot megoldva (a 26. táblázatbeli költségekkel, 1000, 800 és 700 keresletekkel, valamint 1000, 600 és 700 kínálatokkal) azt kapjuk, hogy 1000 ember megy az 1. bázisra, 600 a 2. bázisra, és 700 a 3 bázisra.

Megjegyzés: a kínálati pontok most a központok, a keresleti pontok a bázisok, és szükség van egy 200 kínálattal rendelkező fiktív kínálati pontra. A feladatbeli változó-definíciókat használva a következő IP megfelelő:

min z = 5740S1 + 6030S2 + 6330S3 + 5920S4 + 6200S5 + 6280S6 + 11,110L1 + 11545L2 + 11995L3 + 11380L4 + 11800L5 + 11920L6 + 12,160L7

f.h. S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 ≤ 7
L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 ≤ 5
x11 ≤ 200S1, x21+x22 ≤ 200S2, x32+x33 ≤ 200S3, x42 ≤ 200S4, x53 ≤ 200S5, x61+x63 ≤ 200S6, y11 ≤ 500L1, y21+y22 ≤ 500L2, y32+y33 ≤ 500L3, y42 ≤ 500L4, y53 ≤ 500L5, y61+y63 ≤ 500L6, y71+y72+y73 ≤ 500L7.
x11 + x21 + x61 + y11 + y21 + y61 + y71 = 1000
x22 + x32 + x42 + y22 + y32 + y42 + y72 = 600
x33 + x53 + x63 + y33 + y53 + y63 + y73 = 700
mindegyik változó egészértékű

29. Legyen xi1 = 1 ha az i dal az 1-es oldalon van, xi1 = 0 különben; és xi2 = 1 ha az i dal az 1-es oldalon van, xi2 = 0 különben.
Az alábbi IP bármelyik lehetséges megoldása megfelelő:

max z = 0
f.h.
14 ≤ 4x11 + 5x21 + 3x31 + 2x41 + 4x51 + 3x61 + 5x71 + 4x81 ≤ 16
x11 + x12 = 1, x21 + x22 = 1, x31 + x32 = 1, x41 + x42 = 1
x51 + x52 = 1, x61 + x62 = 1, x71 + x72 = 1, x81 + x82 = 1
x11 + x31 + x51 + x81 = 2, x12 + x32 + x52 + x82 = 2
x21 + x41 + x61 + x81 ≥ 3, x51 + x61 ≥ 1
1 - x52 ≤ y, x21 + x41 – 1 ≤ 1 - y
mindegyik változó = 0 vagy 1

30. Legyen xi,j = 1 ha egy i másodperc hosszú hirdetés a j-edik blokkba kerül, xi,j = 0 különben; és yi = 1 ha használják az I-edik blokkot, yi = 0 különben. Az alábbi egy megfelelő IP:

min z = y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7 + y8
f.h.
15x15,1 + 16x16,1 + 20x20,1 + 25x25,1 + 30x30,1 + 35x35,1 + 40x40,1 + 50x50,1 ≤ 60y1
15x15,2 + 16x16,2 + 20x20,2 + 25x25,2 + 30x30,2 + 35x35,2 + 40x40,2 + 50x50,2 ≤ 60y2
15x15,3 + 16x16,3 + 20x20,3 + 25x25,3 + 30x30,3 + 35x35,3 + 40x40,3 + 50x50,3 ≤ 60y3
15x15,4 + 16x16,4 + 20x20,4 + 25x25,4 + 30x30,4 + 35x35,4 + 40x40,4 + 50x50,4 ≤ 60y4
15x15,5 + 16x16,5 + 20x20,5 + 25x25,5 + 30x30,5 + 35x35,5 + 40x40,5 + 50x50,5 ≤ 60y5
15x15,6 + 16x16,6 + 20x20,6 + 25x25,6 + 30x30,6 + 35x35,6 + 40x40,6 + 50x50,6 ≤ 60y6
15x15,7 + 16x16,7 + 20x20,7 + 25x25,7 + 30x30,7 + 35x35,7 + 40x40,7 + 50x50,7 ≤ 60y7
15x15,8 + 16x16,8 + 20x20,8 + 25x25,8 + 30x30,8 + 35x35,8 + 40x40,8 + 50x50,8 ≤ 60y8
mindegyik változó = 0 vagy 1

31. Legyen $xic = 1$ ha i benzinfajta kerül a c rekeszbe, $xic = 0$ egyébként; ei = a hiány az i benzinfajtából (1 = szuper, 2 = normál, 3 = ólommentes), gic = ahány liter i benzinfajta kerül a c rekeszbe.

$$\min z = 10e1 + 8e2 + 6e3$$

f.h.
$$g11 + g21 + g31 \le 2700$$
$$g12 + g22 + g32 \le 2800$$
$$g13 + g23 + g33 \le 1100$$
$$g14 + g24 + g34 \le 1800$$
$$g15 + g25 + g35 \le 3400$$
$$g11 + g12 + g13 + g14 + g15 + e1 - f1 = 2900$$
$$g21 + g22 + g23 + g24 + g25 + e2 - f2 = 4000$$
$$g31 + g32 + g33 + g34 + g35 + e3 - f3 = 4900$$
$$gi1 \le 2700xi1,\ gi2 \le 2800xi2,\ gi3 \le 1100xi3,$$
$$gi4 \le 1800xi4,\ gi5 \le 3400xi5 \qquad (i = 1,2,3)$$
$$x1j + x2j + x3j \le 1 \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$
$$e1 \le 500,\ e2 \le 500,\ e3 \le 500$$
mindegyik $xij = 0$ vagy 1; mindegyik változó ≥ 0

32. Legyen $xik = 1$ ha k darab i típusú üzlet lesz a bevásárlóközpontban (1-es típus = ékszer, stb.), $xik = 0$ egyébként $k = 0,1,2,3$.

$$\max z = .05(9x11 + 16x12 + 21x13 + 10x21 + 18x22 + 10x23 + 27x31 + 42x32 + 60x33 + 16x41 + 18x42 + 21x43 + 17x51 + 26x52 + 30x53)$$

f.h.
$$500x11 + 1000x12 + 1500x13 + 600x21 + 1200x22 + 1800x23 + 1500x31 + 3000x32 + 4500x33 + 700x41 + 1400x42 + 2100x43 + 900x51 + 1800x52 + 2700x53 \le 10{,}000$$
$$x11 + x12 + x13 = 1$$
$$x21 + x22 + x23 = 1$$
$$x31 + x32 + x33 = 1$$
$$x40 + x41 + x42 + x43 = 1$$
$$x51 + x52 + x53 = 1$$
mindegyik $xij = 0$ vagy 1

33. Legyen $xit = 1$ ha az i-edik vagyontárgyat a t-edik évben értékesítik, $xit = 0$ különben.

$$\max z = 15x11 + 16x21 + 22x31 + 10x41 + 17x51 + 19x61 + 20x12 + 18x22 + 30x32 + 20x42 + 19x52 + 25x62 + 24x13 + 21x23 + 36x33 + 30x43 + 22x53 + 29x63$$

f.h.
$$15x11 + 16x21 + 22x31 + 10x41 + 17x51 + 19x61 \ge 20$$
$$20x12 + 18x22 + 30x32 + 20x42 + 19x52 + 25x62 \ge 30$$
$$24x13 + 21x23 + 36x33 + 30x43 + 22x53 + 29x63 \ge 35$$
$$x11 + x21 + x31 \le 1$$
$$x21 + x22 + x23 \le 1$$
$$x31 + x32 + x33 \le 1$$
$$x41 + x42 + x43 \le 1$$
$$x51 + x52 + x53 \le 1$$
$$x61 + x62 + x63 \le 1$$
mindegyik változó = 0 vagy 1

A gördülő tervezési horizont alkalmazásakor egy három évre szóló feladatot oldanánk meg azt meghatározandó, hogy az aktuális évben mely vagyontárgyakat értékesítsük. Az adott év végén módosítanánk a 32. táblázat adatait majd egy újabb három évre szóló feladatot oldanánk meg a következő évben értékesítendő vagyontárgyak meghatározására.

34.
a. Legyen yk = 1 ha a k-adik hagyományos létrás brigádot toronylétrás brigád váltja fel, és yk = 0 egyébként.

max $z = y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7$
f.h. $y2 + y3 \le 1$, $y3 + y4 \le 1$, $y1 + y5 \le 1$, $y2 + y6 \le 1$,
$y3 + y6 \le 1$, $y4 + y7 \le 1$, $y5 + y7 \le 1$
mindegyik változó = 0 vagy 1

b. max $7 - z1 - z2 - z3 - z4 - z5 - z6 - z7$ vagy
min $z1 + z2 + z3 + z4 + z5 + z6 + z7$
f.h. $z2 + z3 \ge 1$, $z3 + z4 \ge 1$, $z1 + z5 \ge 1$, $z2 + z6 \ge 1$,
$z3 + z6 \ge 1$, $z4 + z7 \ge 1$, $z5 + z7 \ge 1$
mindegyik változó = 0 vagy 1

Ez valóban egy halmazlefedési feladat. A megmaradó hagyományos létrás brigádok számát minimalizáljuk, és egy riasztódoboz akkor "lefedett" ha a legközelebbiek közül marad legalább egy hagyományos létrás brigád.

35. Legyen xi = ahány tonna gőzt állít elő az i-edik kazán; yi = ahány tonna gőzt használ fel a j-edik turbina; ti = 1 ha az i-edik turbinát használják, ti = 0 ha nem; bi = 1 ha az i-edik kazánt használják, bi = 0 ha nem.

min $z = 10x1 + 8x2 + 6x3 + 2y1 + 3y2 + 4y3$
f.h. $4y1 + 5y2 + 6y3 \ge 8000$
$y1 + y2 + y3 = x1 + x2 + x3$
$x1 \ge 500b1$, $x2 \ge 300b2$, $x3 \ge 400b3$
$x1 \le 1000b1$, $x2 \le 900b2$, $x3 \le 800b3$
$y1 \ge 300t1$, $y2 \ge 500t2$, $y3 \ge 600t3$
$y1 \le 600t1$, $y2 \le 800t2$, $y3 \le 900t3$
mindegyik bi és ti = 0 vagy 1
minden egyéb változó ≥ 0

36. Legyen Ai = 1 ha az i leányvállalat önálló marad, Ai = 0 egyébként; Aij = 1 ha az i és j leányvállalatokat összevonják, Aij = 0 egyébként; A123 = 1 ha mind a három leányvállalatot összevonják, A123 = 0 különben.

min $z = 35A1 + 80A2 + 100A3 + 75A12 + 180A23 + 170A13$
$+ 250A123$
f.h. $A1 + A12 + A13 + A123 = 1$
$A2 + A12 + A23 + A123 = 1$
$A3 + A23 + A13 + A123 = 1$
Mindegyik változó = 0 vagy 1

37. Legyen Xij = ahányszor i típusú termet használnak j típusú igény kielégítésére (i=1 jelenti az 50 fős, i=2 a 100 fős, i=3 a 150 fős termet; i=4 pedig a ki nem elégített igényt).
Az alábbi LINDO output tartalmazza a megfelelő IP-t:

```
MIN  2 X21 + 4 X31 + 300 X41 + 300 X42 + X33 + 100 X43 + 2 X24
 + 4 X34 + 200 X44
 SUBJECT TO
         2)   X14 <=   2
         3)   X14 + X11 <=   2
         4)   X11 <=   2
         5)   X11 <=   2
         6)   X24 <=   1
         7)   X21 + X24 <=   1
         8)   X21 <=   1
         9)   X23 <=   1
        10)   X34 + X32 <=   1
        11)   X31 + X34 + X32 <=   1
        12)   X31 + X32 <=   1
        13)   X31 <=   1
        14)   X33 <=   1
        15)   X21 + X31 + X41 + X11 =    3
        16)   X42 + X32 =    1
        17)   X33 + X43 + X23 =    1
        18)   X24 + X34 + X44 + X14 =    2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      402.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X21         1.000000          0.000000
       X31         0.000000          4.000000
       X41         0.000000          0.000000
       X42         0.000000          0.000000
       X33         0.000000          1.000000
       X43         0.000000        100.000000
       X24         0.000000        100.000000
       X34         0.000000        104.000000
       X44         2.000000          0.000000
       X14         0.000000        100.000000
       X11         2.000000          0.000000
       X23         1.000000          0.000000
       X32         1.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         2.000000          0.000000
        3)         0.000000        300.000000
        4)         0.000000          0.000000
        5)         0.000000          0.000000
        6)         1.000000          0.000000
        7)         0.000000        298.000000
        8)         0.000000          0.000000
        9)         0.000000          0.000000
       10)         0.000000          0.000000
       11)         0.000000        300.000000
       12)         0.000000          0.000000
       13)         1.000000          0.000000
       14)         1.000000          0.000000
       15)         0.000000       -300.000000
       16)         0.000000       -300.000000
       17)         0.000000          0.000000
       18)         0.000000       -200.000000
```

38. Legyen Xij = 1 ha i típusú dobozt használnak i,i+1,...j típusú doboz iránti igény kielégítésére. Legyen Yi = 1 ha használnak i típusú dobozt, Yi = 0 ha egyáltalán nem. A megoldás az alábbi LINDO outputon található:

```
MIN  13200 X11 + 9900 X12 + 16500 X13 + 23100 X14 + 6600 X15
     + 13200 X16 + 6600 X17 + 9000 X22 + 15000 X23 + 21000 X24
     + 6000 X25 + 12000 X26 + 6000 X27 + 13000 X33 + 18200 X34
     + 5200 X35 + 10400 X36 + 5200 X37 + 16800 X44 + 4800 X45
     + 9600 X46 + 4800 X47 + 3800 X55 + 7600 X56 + 3800 X57
     + 7200 X66 + 3600 X67 + 3400 X77 + 1000 Y1 + 1000 Y2
     + 1000 Y3 + 1000 Y4 + 1000 Y5 + 1000 Y6 + 1000 Y7
  SUBJECT TO
         2)   X11 =    1
         3)   X12 + X22 =    1
         4)   X13 + X23 + X33 =    1
         5)   X14 + X24 + X34 + X44 =    1
         6)   X15 + X25 + X35 + X45 + X55 =    1
         7)   X16 + X26 + X36 + X46 + X56 + X66 =    1
         8)   X17 + X27 + X37 + X47 + X57 + X67 + X77 =    1
         9)   X11 - Y1 <=   0
        10)   X12 - Y1 <=   0
        11)   X13 - Y1 <=   0
        12)   X14 - Y1 <=   0
        13)   X15 - Y1 <=   0
        14)   X16 - Y1 <=   0
        15)   X17 - Y1 <=   0
        16)   X22 - Y2 <=   0
        17)   X23 - Y2 <=   0
        18)   X24 - Y2 <=   0
        19)   X25 - Y2 <=   0
        20)   X26 - Y2 <=   0
        21)   X27 - Y2 <=   0
        22)   X33 - Y3 <=   0
        23)   X34 - Y3 <=   0
        24)   X35 - Y3 <=   0
        25)   X36 - Y3 <=   0
        26)   X37 - Y3 <=   0
        27)   X44 - Y4 <=   0
        28)   X45 - Y4 <=   0
        29)   X46 - Y4 <=   0
        30)   X47 - Y4 <=   0
        31)   X55 - Y5 <=   0
        32)   X56 - Y5 <=   0
        33)   X57 - Y5 <=   0
        34)   X66 - Y6 <=   0
        35)   X67 - Y6 <=   0
        36)   X77 - Y7 <=   0

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      72100.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11         1.000000      13200.000000
       X12         1.000000       9900.000000
       X13         0.000000      16500.000000
       X14         0.000000      23100.000000
       X15         0.000000       6600.000000
       X16         0.000000      13200.000000
       X17         0.000000       6600.000000
```

X22	0.000000	9000.000000
X23	0.000000	15000.000000
X24	0.000000	21000.000000
X25	0.000000	6000.000000
X26	0.000000	12000.000000
X27	0.000000	6000.000000
X33	1.000000	13000.000000
X34	0.000000	18200.000000
X35	0.000000	5200.000000
X36	0.000000	10400.000000
X37	0.000000	5200.000000
X44	1.000000	16800.000000
X45	0.000000	4800.000000
X46	0.000000	9600.000000
X47	0.000000	4800.000000
X55	1.000000	3800.000000
X56	1.000000	7600.000000
X57	1.000000	3800.000000
X66	0.000000	7200.000000
X67	0.000000	3600.000000
X77	0.000000	3400.000000
Y1	1.000000	1000.000000
Y2	0.000000	1000.000000
Y3	1.000000	1000.000000
Y4	1.000000	1000.000000
Y5	1.000000	1000.000000
Y6	0.000000	1000.000000
Y7	0.000000	1000.000000

39a.

	W1	W2	W3	C1	C2	C3	C4	FIKTÍV	
P1	800	1000	1200	M	M	M	M	0	300
P2	700	500	700	M	M	M	M	0	200
P3	800	600	500	M	M	M	M	0	300
P4	500	600	700	M	M	M	M	0	200
P5	700	600	500	M	M	M	M	0	400
W1	0	M	M	40	80	90	50	0	1400
W2	M	0	M	70	40	60	80	0	1400
W3	M	M	0	80	30	50	60	0	1400
	1400	1400	1400	200	300	150	250	500	

39b. Legyen Pij = ahány tonnányit készítenek az i üzemben és

szállítanak onnan a j raktárba; Wij = ahány tonnányit szállítanak az i raktárból a j vásárlóhoz; Yi = 1 ha az i üzem termel, Yi = 0 ha nem termel; Zi = 1 ha használják az i raktárat, Zi = 0 ha nem használják.
Az optimális megoldás az alábbi LINDO outputon található.

```
MIN 35Y1+45Y2+40Y3+42Y4+30Z1+40Z2+30Z3+40Y5+.8P11+P12+1.2P13
  +.7P21+.5P22+.7P23+.8P31+.6P32+.5P33+.5P41+.6P42+.7P43+.7P51
  +.6P52+.5P53+.04W11+.08W12+.09W13+.05W14+.07W21+.07W22+.06W23
  +.08W24+.08W31+.03W32+.05W33+.06W34
SUBJECT TO
  -300Y1+P11+P12+P13<0
  -200Y2+P21+P22+P23<0
  -300Y3+P31+P32+P33<0
  -200Y4+P41+P42+P43<0
  -400Y5+P51+P52+P53<0
  P11+P21+P31+P41+P51-W11-W12-W13-W14=0
  P12+P22+P32+P42+P52-W21-W22-W23-W24=0
  P13+P23+P33+P43+P53-W31-W32-W33-W34=0
  -900Z1+W11+W12+W13+W14<0
  -900Z2+W21+W22+W23+W24<0
  -900Z3+W31+W32+W33+E34<0
  W11+W21+W31>200
  W12+W22+W32>300
  W13+W23+W33>150
  W14+W24+W34>250

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      671.5000
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y1	0.000000	35.000000
Y2	0.000000	45.000000
Y3	1.000000	40.000000
Y4	1.000000	40.000000
Z1	1.000000	30.000000
Z2	0.000000	40.000000
Z3	1.000000	30.000000
Y5	1.000000	40.000000
P11	0.000000	0.290000
P12	0.000000	0.510000
P13	0.000000	0.700000
P21	0.000000	0.190000
P22	0.000000	0.010000
P23	0.000000	0.200000
P31	0.000000	0.290000
P32	0.000000	0.110000
P33	300.000000	0.000000
P41	200.000000	0.000000
P42	0.000000	0.120000
P43	0.000000	0.210000
P51	0.000000	0.190000
P52	0.000000	0.110000
P53	400.000000	0.000000
W11	200.000000	0.000000
W12	0.000000	0.060000
W13	0.000000	0.050000
W14	0.000000	0.000000
W21	0.000000	0.010000
W22	0.000000	0.030000

```
W23         0.000000         0.000000
W24         0.000000         0.010000
W31         0.000000         0.030000
W32       300.000000         0.000000
W33       150.000000         0.000000
W34       250.000000         0.000000
E34         0.000000         0.000000
```

40. Legyen T7 = az épített TA7 vezetékek száma, T8 = az épített TA8 vezetékek száma, SAT = a felküldött műholdak száma, FC = a francia vezetékes vonalak száma, FS = a francia műholdas vonalak száma, GC = a német vezetékes vonalak száma, GS = a német műholdas vonalak száma, SC = a svájci vezetékes vonalak száma, SS = a svájci műholdas vonalak száma, UC = a brit vezetékes vonalak száma, US = a brit műholdas vonalak száma (mindegyik változó ezer vonalban megadva). Legyen továbbá, EF = a francia földi vevőállomások száma, EG = a német földi vevőállomások száma, ES = a svájci földi vevőállomások száma, EU = a brit földi vevőállomások száma, EST = az összes földi vevőállomás száma.
A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MIN  1600000 T7 + 2300000 T8 + 3000000 SAT + 6.2 GC + 5.8 SC
     + 120 EST
  SUBJECT TO
         2)   FC + FS =    20
         3)   SC + SS =    16
         4)   UC + US =    60
         5) - 140 SAT + FS + SS + US + GS <=   0
         6) - 8.5 T7 - 37.8 T8 + GC + SC + FC + UC <=   0
         7) - EF - EG - ES - EU + EST =    0
         8) - 0.19 EF + FS <=   0
         9) - 0.19 EG + GS <=   0
        10) - 0.19 ES + SS <=   0
        11) - 0.19 EU + US <=   0
        12)   GC + GS =    60
  END
  GIN        T7
  GIN        T8
  GIN        EF
  GIN        EG
  GIN        ES
  GIN        EU
  GIN       SAT
```

Az optimális megoldás: z= 5374760 T8=1, EG=316, ES=84, EU=223, SAT=1, EST=623, FC=20, SS=15.96, UC=17.63, US=42.37, GS=60. Minden más változó = 0.

41. Legyen Ni = az i körzethez rendelt látogatók száma; Xij = az i körzethez rendelt látogatók által a j körzetben tett látogatások száma; és Yi = 1 ha van az i körzethez rendelt látogató, Yi=0 egyébként.
A megoldást lásd a LINDO outputon:

```
  MIN  80N1 + 80N2 + 80N3 + 80N4 + 88Y1 + 88Y2 + 88Y3 + 88Y4
  SUBJECT TO
         2) - 160 N1 + X11 + 4 X12 + 5 X13 + 7 X14 <=   0
         3) - 160 N2 + 4 X21 + X22 + 3 X23 + 5 X24 <=   0
         4) - 160 N3 + 5 X31 + 3 X32 + X33 + 2 X34 <=   0
```

```
        5) - 160 N4 + 7 X41 + 5 X42 + 2 X43 + X44 <=   0
        6)   X11 + X21 + X31 + X41 >=   50
        7)   X12 + X22 + X32 + X42 >=   80
        8)   X13 + X23 + X33 + X43 >=   100
        9)   X14 + X24 + X34 + X44 >=   60
       10)   N1 - 15 Y1 <=   0
       11)   N2 - 15 Y2 <=   0
       12)   N3 - 15 Y3 <=   0
       13)   N4 - 15 Y4 <=   0
 END
 GIN        N1
 GIN        N2
 GIN        N3
 GIN        N4
 SUB       Y1        1.00000
 INTE       Y1
 SUB       Y2        1.00000
 INTE       Y2
 SUB       Y3        1.00000
 INTE       Y3
 SUB       Y4        1.00000
 INTE       Y4

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      488.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       N1         0.000000         80.000000
       N2         0.000000         80.000000
       N3         5.000000         80.000000
       N4         0.000000         80.000000
       Y1         0.000000         88.000000
       Y2         0.000000         88.000000
       Y3         1.000000         88.000000
       Y4         0.000000         88.000000
      X11         0.000000          0.000000
      X12         0.000000          0.000000
      X13         0.000000          0.000000
      X14         0.000000          0.000000
      X21         0.000000          0.000000
      X22         0.000000          0.000000
      X23         0.000000          0.000000
      X24         0.000000          0.000000
      X31        50.000000          0.000000
      X32        80.000000          0.000000
      X33       100.000000          0.000000
      X34        60.000000          0.000000
      X41         0.000000          0.000000
      X42         0.000000          0.000000
      X43         0.000000          0.000000
      X44         0.000000          0.000000
```

42. Az alábbi EXCEL tábla mutatja az időtartamok kiszámítását. A modellben i=1,2,...6 mellett legyen Xi = a vett i típusú kötvények száma; X7 = a vett államkötvények száma; Yi = 1 ha veszünk i típusú kötvényt, Yi = 0 különben. A megoldást lásd a LINDO outputon.
Megjegyzés: a 9) feltétel biztosítja, hogy a portfolio időtartama “megfelel” a kifizetés-folyamnak.

	B	C	D	E	F	G	H
3							
4	Year	Bond 1	Bond 2	Bond 3	Bond 4	Bond 5	Bond 6
5	1	50	100	130	20	100	120
6	2	60	90	130	20	100	100
7	3	70	80	130	20	100	80
8	4	80	70	130	20	100	140
9	5	90	60	130	20	100	100
10	6	100	50	130	80	100	90
11	7	110	40	130	40	100	110
12	8	120	30	130	150	100	130
13	9	130	20	130	200	100	180
14	10	1010	1040	1130	1200	1100	950
15	Price	$871.56	$782.65	$1,184.34	$758.95	$1,000.00	$1,020.05
16							
17							
18	Year	Bond 1	Bond 2	Bond 3	Bond 4	Bond 5	Bond 6
19	1	45.454545	90.9090909	118.181818	18.181818	90.909091	109.09091
20	2	99.173554	148.760331	214.876033	33.057851	165.28926	165.28926
21	3	157.77611	180.315552	293.012772	45.078888	225.39444	180.31555
22	4	218.56431	191.243768	355.166997	54.641076	273.20538	382.48754
23	5	279.4146	186.276397	403.59886	62.092132	310.46066	310.46066
24	6	338.68436	169.342179	440.289665	270.94749	338.68436	304.81592
25	7	395.13175	143.684273	466.973888	143.68427	359.21068	395.13175
26	8	447.84709	111.961771	485.167675	559.80886	373.2059	485.16768
27	9	496.19421	76.3375713	496.194213	763.37571	381.68786	687.03814
28	10	3893.9872	4009.65021	4356.63917	4626.5195	4240.9762	3662.6612
29	Duration	7.3112526	6.78267632	6.44250835	8.6664586	6.7590238	6.5510804
30							
31	Dur*Pr	$6,372.23	$5,308.48	$7,630.10	$6,577.39	$6,759.02	$6,682.46

```
MIN  500 Y1 + 500 Y2 + 500 Y3 + 500 Y4 + 500 Y5 + 500 Y6
     + 5 X1 + 5 X2 + 5 X3 + 5 X4 + 5 X5 + 5 X6
  SUBJECT TO
    2)   872 X1 + 783 X2 + 1184 X3 + 759 X4 + 1000 X5 + 1020 X6
    + 980 X7  =  251780
    3) - 100 Y1 + X1 <=   0
    4) - 100 Y2 + X2 <=   0
    5) - 100 Y3 + X3 <=   0
    6) - 100 Y4 + X4 <=   0
    7) - 100 Y5 + X5 <=   0
    8) - 100 Y6 + X6 <=   0
    9)  6372 X1 + 5308 X2 + 7630 X3 + 6577 X4 + 6759 X5
    + 6682 X6 + 245 X7 = 1125456.7

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)     1752.8130

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1          .000000        500.000000
        Y2          .000000        500.000000
        Y3         1.000000        436.626200
        Y4          .000000        500.000000
        Y5         1.000000        500.000000
        Y6          .000000        500.000000
        X1          .000000           .272699
        X2          .000000          1.072937
```

X3	100.000000	.000000
X4	.000000	.093524
X5	50.562550	.000000
X6	.000000	.062990
X7	84.507610	.000000

43. Legyen xij = 1 ha i üzem gyárt j típusú autót (1-es típus = Taurus, stb.) és legyen xij = 0 különben. Továbbá, legyen yj = 1 ha a j üzem gyárt valamilyen típusú autót, yj = 0 egyébként. Ekkor (a célfüggvény milliard dollárban értendő):

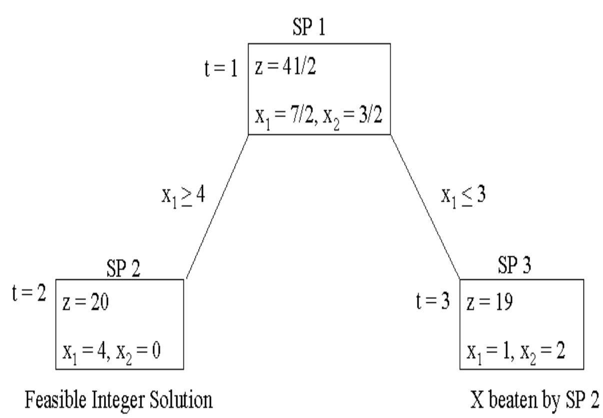
min z = 7y1 + 6y2 + 4y3 + 2y4 + 6x11 + 8x12 + 4.5x13 + 7.5x21 + 9x22 + 5.5x23 + 8.5x31 + 9.5x32 + 6x33 + 9.5x41 + 11x42 + 7x43

f.h. x11 + x21 + x31 + x41 = 1
x12 + x22 + x32 + x42 = 1
x13 + x23 + x33 + x43 = 1
x1j ≤ y1, j = 1,2,3
x2j ≤ y2, j = 1,2,3
x3j ≤ y3, j = 1,2,3
x4j ≤ y4, j = 1,2,3
x11 + x12 + x13 ≤ 1
x21 + x22 + x23 ≤ 1
x31 + x32 + x33 ≤ 1
x41 + x42 + x43 ≤ 1
1 - y1 ≤ z
y3 + y4 – 1 ≤ 1 - z
mindegyik változó = 0 vagy 1

44. Az y_i változók tetszőleges értékére (amik a használt lockboxokat azonosítják) a feladat egy szállítási vagy hozzárendelési feladatra egyszerűsödik, az optimális x_{ij} értékek következésképpen mindig egészek.

8.3 Alfejezet

1.



Optimal Solution is $z = 20$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

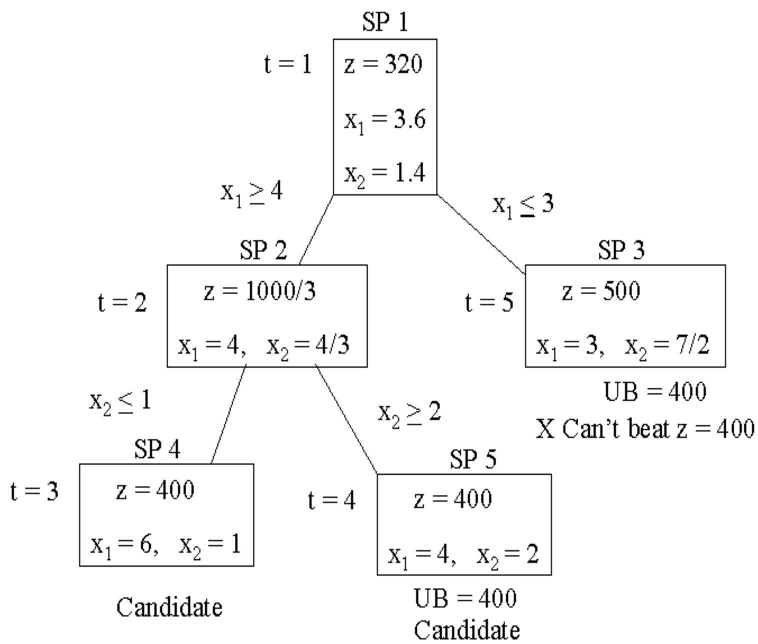
Az optimális megoldás: $z=20$, $x_1=4$, $x_2=0$.

2. Megoldandó:

$$\min z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{f.h.} \quad \begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 &\geq 24 \\ x_1, \; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

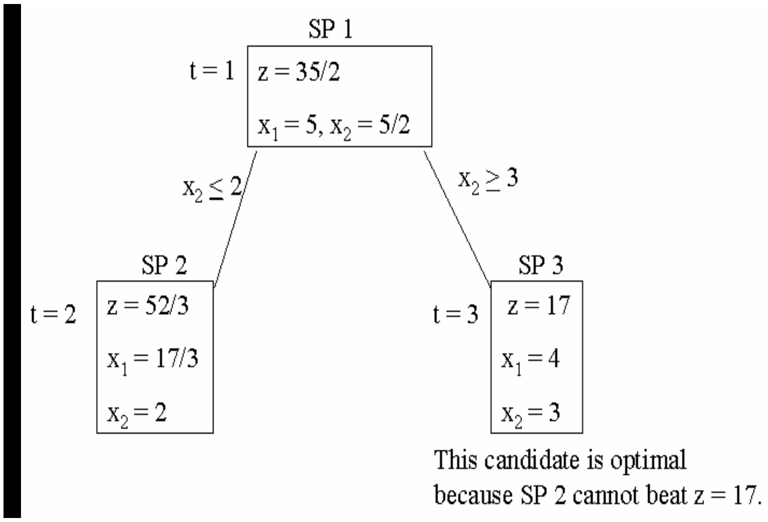
$$\text{st} \quad \begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 &\geq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



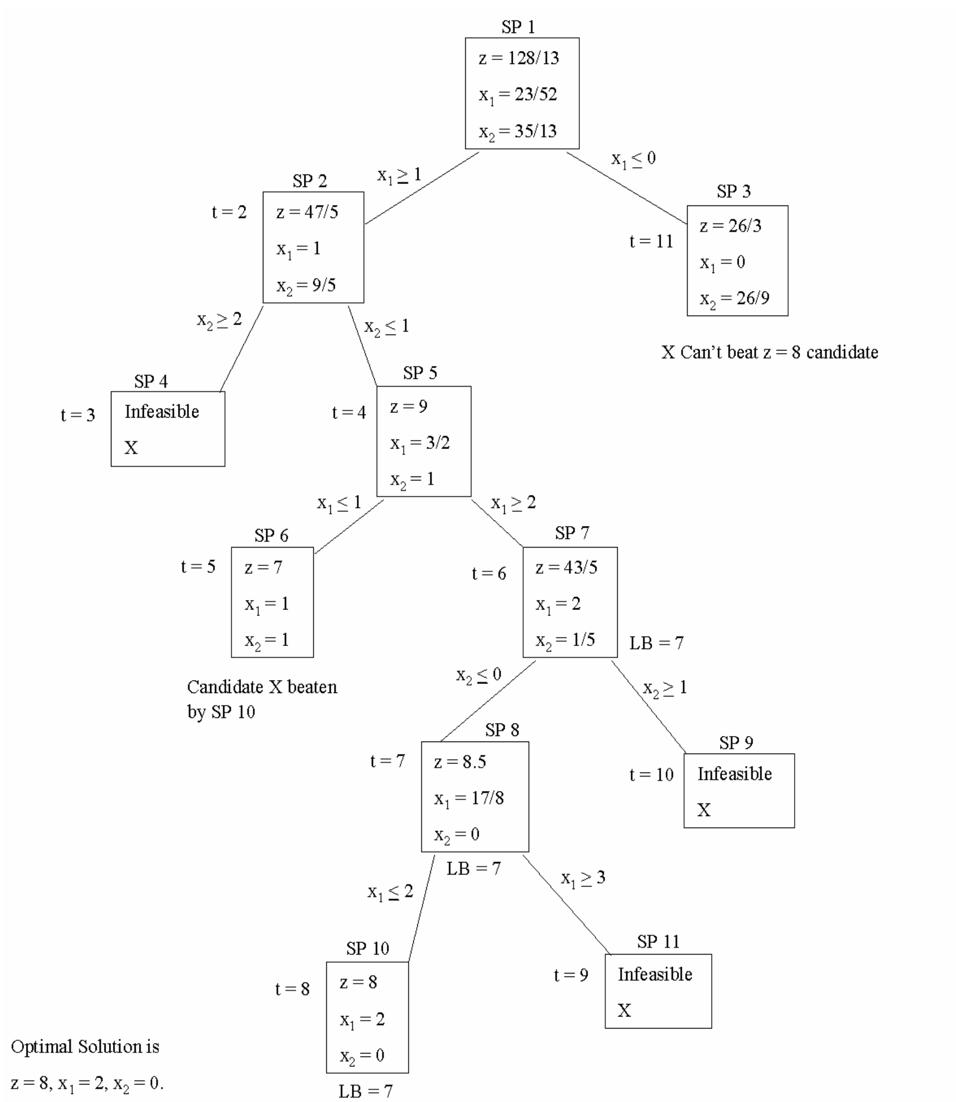
A részfeladatok megoldásakor használtuk a 8. feladatban tárgyalt eredményt, nevezetesen, hogy egy részfeladat optimális megoldásánál a "legújabb" korlátozó feltétel mindig kötött. Például, tudjuk, hogy az SP2-nek van olyan optimális megoldása amelyben $x_1 = 4$.

Két optimális megoldás van: $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ és $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

3.

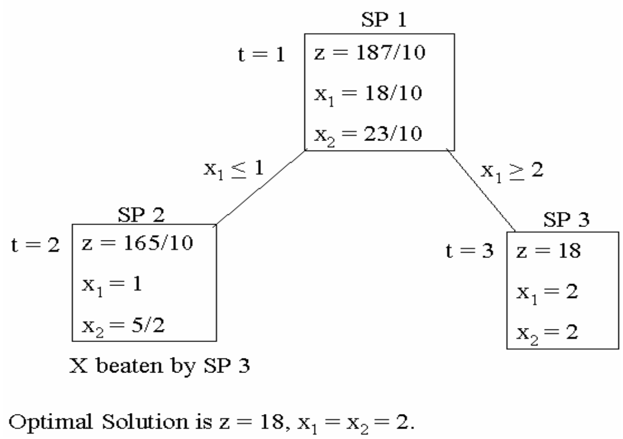


4.

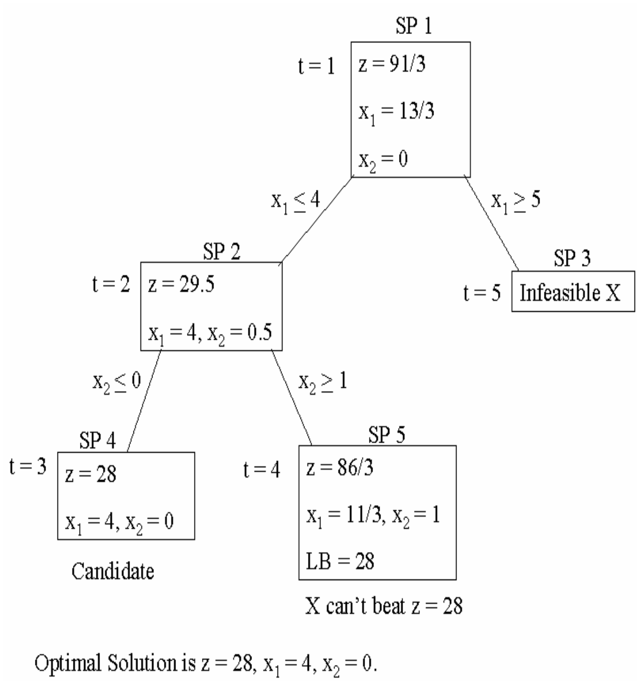


5. Az optimális megoldás: $z=13$, $x_1=2$, $x_2=1$.

6.



7.



8. Ha c ($0<c<1$) olyan, hogy az UJMOL = c(MOL0) + (1 - c)MOL1 vektorban x_1 = i, akkor UJMOL kielégíti az 1. részfeladat (SP1) minden feltételét.

Másrészt, z(UJMOL) - z(MOL1) = c(z(MOL0) - z(MOL1)) ≥ 0, ugyanis MOL0 optimális a 0. részfeladatban (SP0) de MOL1 nem feltétlenül optimális a 0. részfeladatban. Ha tehát MOL1 optimális az 1. részfeladatban, akkor UJMOL szintén optimális az 1. részfeladatban, és teljesül rá, hogy x_1 = i.

Ebből következően, ha például az $x_1 \geq 2$ korlátozó feltétellel ágaztatunk, a keletkező részfeladatnak lesz olyan optimális megoldása amelyben x_1 = 2.

Ez az eredmény tehát nagymértékben leegyszerűsíti a részfeladatok megoldását.

9a. Bevezetve az It = raktárkészlet a t-edik periódus végén jelentésű változókat a LINDO 20 ágaztatás után a következő eredményt adja:

```
MIN   250 Y1 + 250 Y2 + 250 Y3 + 250 Y4 + 250 Y5 + 2 X1
  + 2 X2 + 2 X3 + 2 X4 + 2 X5 + I1 + I2 + I3 + I4 + I5
SUBJECT TO
         2) - 1270 Y1 + X1 <=   0
         3) - 1270 Y2 + X2 <=   0
         4) - 1270 Y3 + X3 <=   0
         5) - 1270 Y4 + X4 <=   0
         6) - 1270 Y5 + X5 <=   0
         7) - X1 + I1 =  - 220
         8) - X2 - I1 + I2 =  - 280
         9) - X3 - I2 + I3 =  - 360
        10) - X4 - I3 + I4 =  - 140
        11) - X5 - I4 + I5 =  - 270

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
         1)      3680.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000        250.000000
        Y2         1.000000        250.000000
        Y3         1.000000        250.000000
        Y4         0.000000      -1020.000000
        Y5         1.000000        250.000000
        X1       220.000000          0.000000
        X2       280.000000          0.000000
        X3       500.000000          0.000000
        X4         0.000000          0.000000
        X5       270.000000          0.000000
        I1         0.000000          1.000000
        I2         0.000000          1.000000
        I3       140.000000          0.000000
        I4         0.000000          2.000000
        I5         0.000000          3.000000
```

9b. A megoldás az alábbi LINDO outputon látható. Az LP optimális megoldása rögtön optimális megoldást ad!!

```
MIN   250 Y1 + 250 Y2 + 250 Y3 + 250 Y4 + 250 Y5 + 2 X11
   + 3 X12 + 4 X13 + 5 X14 + 6 X15 + 2 X22 + 3 X23 + 4 X24
   + 5 X25 + 2 X33 + 3 X34 + 4 X35 + 2 X44 + 3 X45 + 2 X55
 SUBJECT TO
         2)   X11 =    220
         3)   X12 + X22 =    280
         4)   X13 + X23 + X33 =    360
         5)   X14 + X24 + X34 + X44 =    140
         6)   X15 + X25 + X35 + X45 + X55 =    270
         7) - 220 Y1 + X11 <=   0
         8) - 280 Y1 + X12 <=   0
         9) - 360 Y1 + X13 <=   0
        10) - 140 Y1 + X14 <=   0
        11) - 270 Y1 + X15 <=   0
        12) - 280 Y2 + X22 <=   0
        13) - 360 Y2 + X23 <=   0
        14) - 140 Y2 + X24 <=   0
        15) - 270 Y2 + X25 <=   0
        16) - 360 Y3 + X33 <=   0
        17) - 140 Y3 + X34 <=   0
        18) - 270 Y3 + X35 <=   0
        19) - 140 Y4 + X44 <=   0
        20) - 270 Y4 + X45 <=   0
```

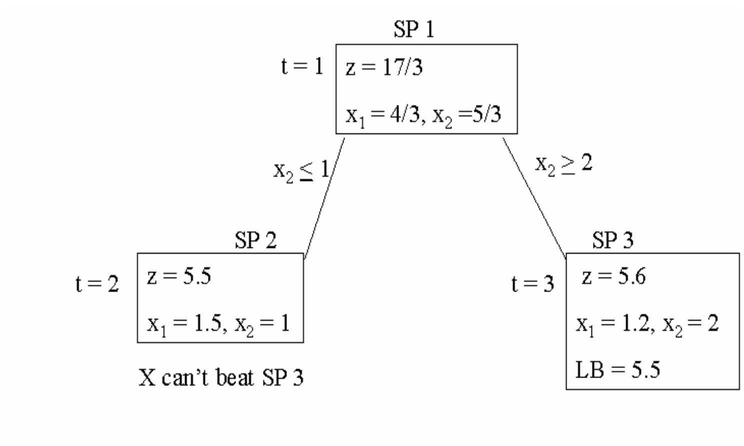
```
       21) - 270 Y5 + X55 <=   0

 OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      3680.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       Y1         1.000000        250.000000
       Y2         1.000000        -30.000000
       Y3         1.000000        250.000000
       Y4         0.000000        110.000000
       Y5         1.000000        250.000000
      X11       220.000000          0.000000
      X12         0.000000          0.000000
      X13         0.000000          2.000000
      X14         0.000000          2.000000
      X15         0.000000          4.000000
      X22       280.000000          0.000000
      X23         0.000000          1.000000
      X24         0.000000          1.000000
      X25         0.000000          3.000000
      X33       360.000000          0.000000
      X34       140.000000          0.000000
      X35         0.000000          2.000000
      X44         0.000000          0.000000
      X45         0.000000          1.000000
      X55       270.000000          0.000000
```

9c. A (b) alatti a gyorsabb.

9d. A (9a) LP lazítása sok törtértékű Yi változót megenged, nem úgy mint a (9b)-é. Például, 1/1270<Y1<1/220 adhat olyan lehetséges megoldást amelyben X11>0 a (9a)-ban, de nem a (9b)-ben. A (9a) model esetén tehát "nagyobb" a lehetséges megoldáshalmaz, és így a keresés is tovább tart mint a (9b) esetén. Valójában meg lehet mutatni, hogy a (9b) LP relaxáltjának mindig van egészértékű optimális megoldása.

8.4 Alfejezet

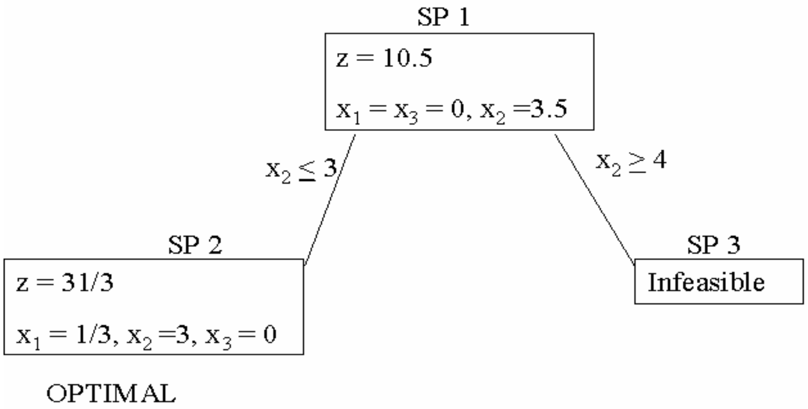
1.



The optimal Solution is $z = 5.6$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 2$.

2. Az LP lazítás optimális megoldása $z = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Mivel ebben x_1 egész, ez az IP feladat optimális megoldása is.

3.



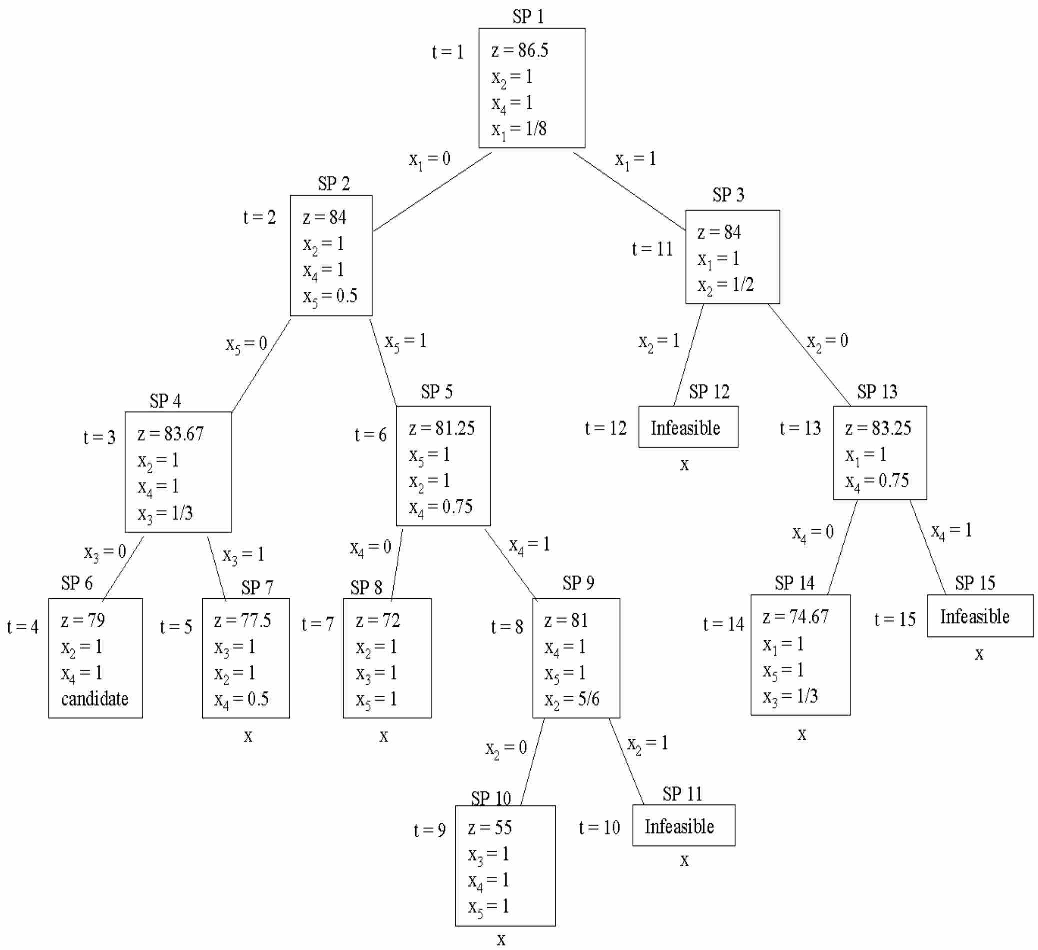
8.5 Alfejezet

1. Mivel legfeljebb nyolc 1-es tárgy vihető fel, definiáljuk az 1', 2', ... 8'-as tárgyakat azonosnak az 1-es tárggyal. Hasonlóképpen, legyen 9', 10',... 14' hat darab a 2-es tárggyal, míg 15', 16',... 19' öt darab a 3-as tárggyal azonos tárgy. Ekkor egy 0-1 hátizsák-feladatot kapunk, ha i=1,…,19-re bevezetjük az $x_i = 1$ ha az i' tárgyat kiválasztjuk, $x_i = 0$ egyébként jelentésű 0-1 változókat.

2. Legyen 1-es tárgy = hálógarnitúra,... , 5-ös tárgy = TV készülék. Legyen $x_i = 1$ ha az i tárgyat visszük, $x_i = 0$ különben. A hátizsák-feladat:

$$\begin{aligned} \max z &= 60x_1 + 48x_2 + 14x_3 + 31x_4 + 10x_5 \\ \text{f.h.} \quad & 800x_1 + 600x_2 + 300x_3 + 400x_4 + 200x_5 \le 1100 \\ & x_i = 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

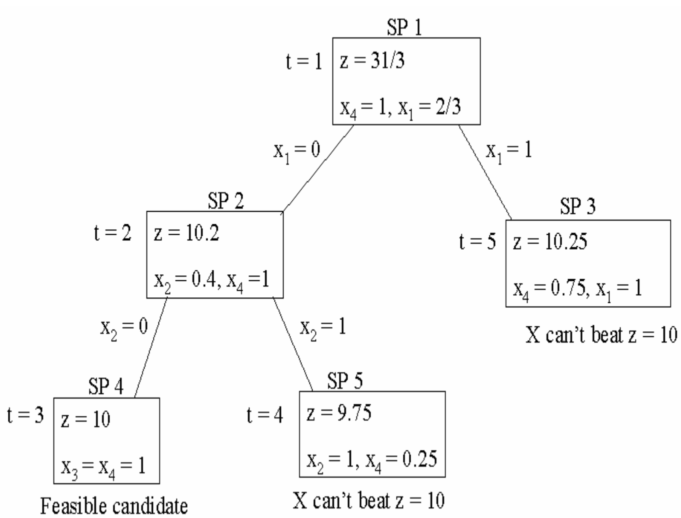
Az alábbi fából látjuk, hogy az optimális megoldás: $z = 79$, $x_2 = x_4 = 1$, $x_1 = x_3 = x_5 = 0$.



3. Legyen $x_i = 1$ ha az i-edik projektet választjuk, $x_i = 0$ ha nem. A hátizsák-feladat:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 \\ \text{f.h.} \quad & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 6 \\ & x_i = 0 \text{ or } 1 \end{aligned}$$

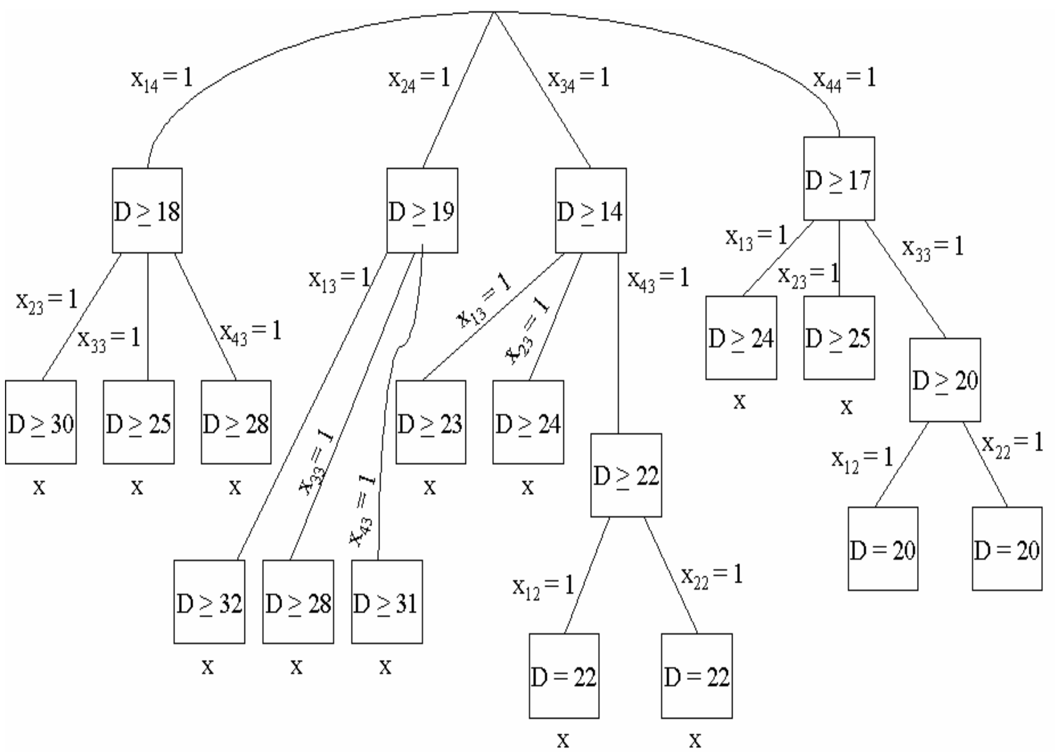
A megoldási fa a következő (a fel nem tüntetett változók 0-k):



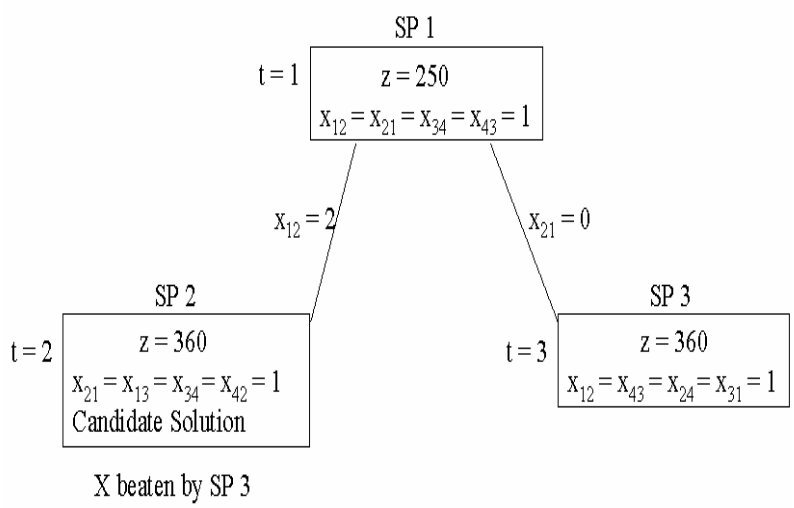
Vegyük észre, hogy mivel az optimális célfüggvényérték minden lehetséges megoldásra egész, az SP3 részfeladat optimális megoldása legfeljebb z=10 lehet, ezért (amennyiben megelégszünk egy optimális megoldással) az SP3-t kizárhatjuk a további vizsgálatokból. A feladat egy optimális megoldása: z = 10, x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = 1.

8.6 Alfejezet

1. A megoldási fát a legjobb korlátra való keresztléptetés szerint járjuk be. Ekkor az x_{34} = 1 ággal kezdünk, ami egy D = 22 perces lehetséges megoldást ad (D=a késések összege). Az x_{44} = 1 ággal folytatva egy D = 20-as lehetséges megoldáshoz jutunk. Mivel ennél jobbat egyetlen másik ág sem adhat, a munkák optimális sorrendja: 1-es munka, 2-es munka, 3-as munka, s végül 4-es munka (ekkor a késések összege 20 perc). Egyébként a 2-es, 1-es, 3-as, 4-es sorrend is optimális.



2. Legyen OMN = 1-es város, OMS = 2-es város, OTN = 3-as város, OTS = 4-es város. A megoldási fa:



Mivel az 1-2-4-3-1 az optimális megoldás, a benzinfajták OMN-OMS-OTS-OTN-OMN sorrendjével érhető el a 330 perces legkisebb átállási idő.

3. Vegyünk fel egy 1' várost, valamint a (2,1'), (3,1'), (4,1') éleket. Az (i,1') él költsége legyen az (i,1) él költsége. Keressünk legrövidebb Hamilton-utat 1-ből 1'-be.

4a. Ez egy minimális feszítőfa probléma. Az optimális megoldás az, hogy kössük össze az 1 és 2, 1 és 3, 1 és 4 tüskéket.

4b. A 4a feladatbeli megoldásban három huzal is érinti az 1-es tüskét, ez most nem megengedett. A következő TSP-vel viszont megoldhatjuk a problémát:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	2	2
2	0	1	0	3	2.9
3	0	2	3	0	3
4	0	2	2.9	3	0

Vegyük észre, hogy ekkor egyetlen tüskét sem érint kettőnél több huzal.

5a. Kezdjük az OMN = 1-el. Ezután a 2, majd a 4, végül a 3 következik. Ismét megkapjuk az 1-2-4-3-1 minimális költségű körutat.

5b. Kezdjük az (1,2)-(2,1) részkörúttal.

Kicserélt él	Hozzávett élek	Költségnövekedés
(1,2)	(1,3)-(3,2)	120+130-50 = 200
(1,2)	(1,4)-(4,2)	140+120-50 = 210
(2,1)	(2,3)-(3,1)	140+90-60 = 170*
(2,1)	(2,4)-(4,1)	110+130-60 = 180

Ezek közül a legjobb az (1,2)-(2,3)-(3,1) részkörút.

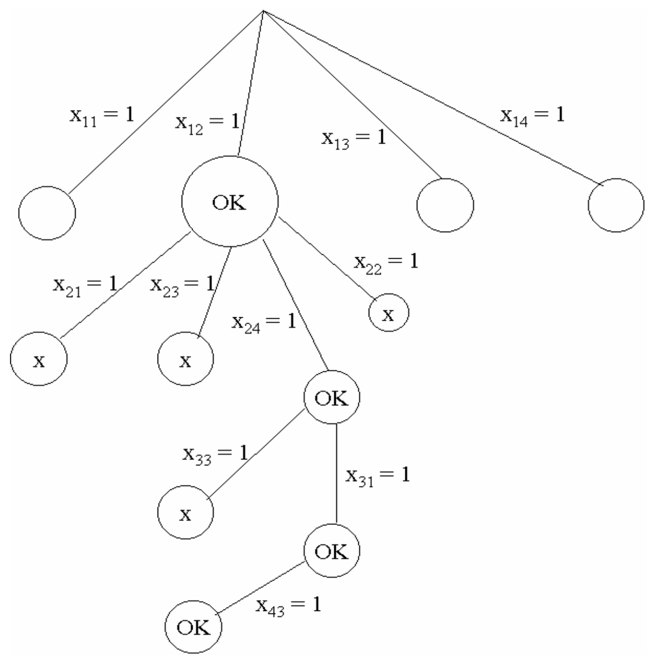
Kicserélt él	Hozzávett élek	Költségnövekedés
(1,2)	(1,4)-(4,2)	140+120-50 = 210
(2,3)	(2,4)-(4,3)	110+80-140 = 50*
(3,1)	(3,4)-(4,1)	60+130-90 = 100

Ezek közül a legjobb adja az optimális 1-2-4-3-1 körutat, melynek hossza 330 perc.

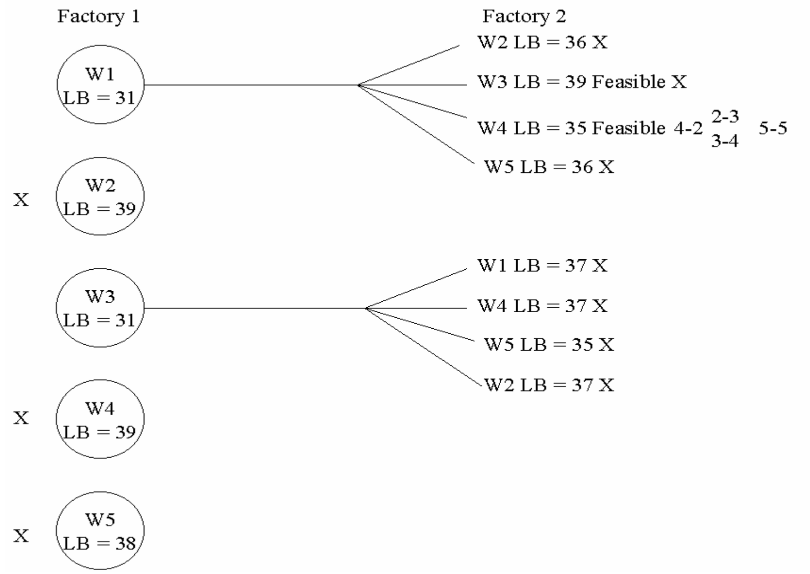
6. Legyen a 6-os helyszín a csomagoló, és d_{ij} = az i és j helyszínek közötti távolság. Ilymódon egy 6 várost tartalmazó TSP-t kapunk, melyben a távolságmátrix i-j eleme d_{ij}, a kiinduló állomás pedig a 6-os helyszín, a csomagoló.

7. Legyen $x_{ij} = 1$ ha van királynő az i-edik sor j-edik oszlopában, $x_{ij} = 0$ különben. A fa egy csúcsánál az "OK" azt jelzi, hogy az addig lerakott királynők nem ütik egymást, az "x" viszont azt, hogy vannak ütésben lévők. Az "OK" bejegyzések a következő megoldást adják:

	X		
			X
X			
		X	



8. A Factory 1, W1 csúcs azt jelenti, hogy az 1-es raktár az 1-es gyár igényét elégíti ki, stb.. A W1-Factory 1 és W4-Factory 2 út ad egy optimális hozzárendelést: 1-es raktárból az 1-es gyárba, 4-es raktárból a 2-es gyárba, 2-es raktárból a 3-as gyárba, 3-as raktárból a 4-es gyárba, és 5-ös raktárból az 5-ös gyárba. Az összköltség 35,000 $.



9. Az alábbi mátrix i-j eleme megadja a keletkező hulladék nagyságát akkor, ha az i-edik darab után a j-edik darabot vágjuk le:

	1. darab	2. darab	3. darab	4. darab	kezdőpont
1. darab	M	0.7	0.5	0.0	0.3
2. darab	0.5	M	0.4	0.9	0.2
3. darab	0.8	0.9	M	0.2	0.5
4. darab	0.4	0.5	0.3	M	0.1
kezdőpont	0.3	0.4	0.2	0.7	M

Például, ha a 2. darab után a 3. darabot vágjuk le, a 2. darab a tekercs kezdetétől 0.8 méterre végződik, tehát (1 - 0.8) + (0.2) = 0.4 métert ki kell hagynunk a 2. darab végétől a 3. darab kezdetéig. A fenti mátrixszal megadott hozzárendelési feladat egy optimális megoldása:

$$z = 1.7,\ x_{13} = x_{34} = x_{25} = x_{42} = x_{51} = 1.$$

Mivel ez a megoldás nem tartalmaz részkörutat, optimális. Tehát először az 1-es, majd a 3-as, aztán a 4-es, majd a 2-es, s végül a mintakezdetig tartó darabot kell levágnuk. A hulladék ekkor a legkisebb, mégpedig 1.7 méter.

10. A távolságmátrix:

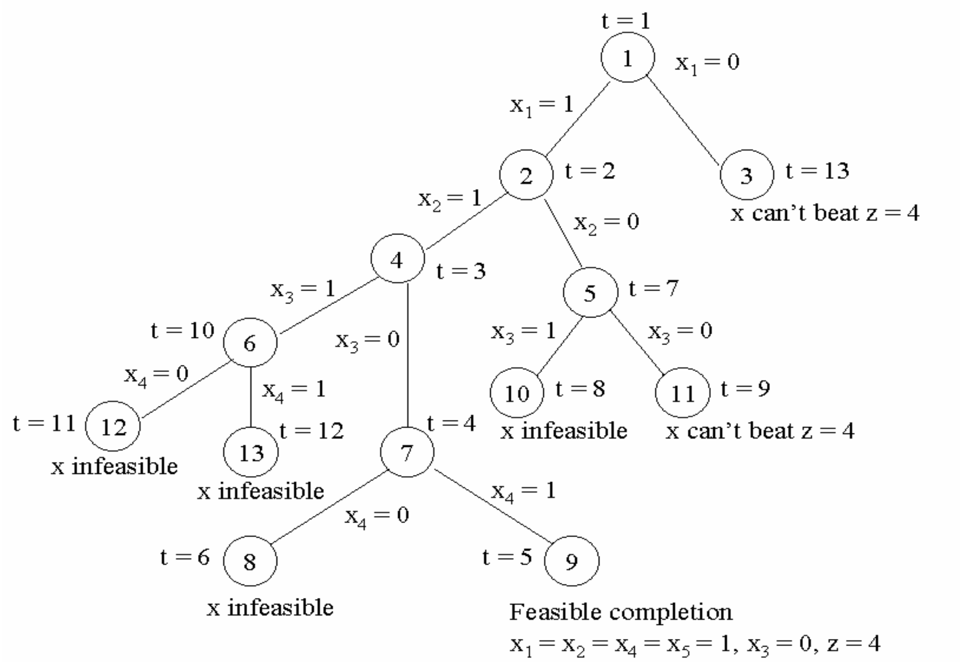
	1	2	3	4	5
1	0	$5^{1/2}$	$17^{1/2}$	6	$50^{1/2}$
2	$5^{1/2}$	0	$2(2)^{1/2}$	$17^{1/2}$	$29^{1/2}$
3	$17^{1/2}$	$2(2)^{1/2}$	0	$5^{1/2}$	3
4	6	$17^{1/2}$	$5^{1/2}$	0	$2^{1/2}$
5	$50^{1/2}$	$29^{1/2}$	3	$2^{1/2}$	0

Az optimális fúrási sorrend: 1-2-4-5-3-1, a fúrófej mozgatásához szükséges idő ekkor 14.89 másodperc.

11. A korlátozás és szétválasztás módszerével kapjuk, hogy a munkák optimális sorrendje: 1-es, 2-es, 3-as, 4-es. Ekkor a késedelmi büntetés = 47 dollár/nap.

8.7 Alfejezet

1. Az alábbi megoldási fából látjuk, hogy az IP optimális megoldása: $z = 4$, $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 1$, $x_3 = 0$.

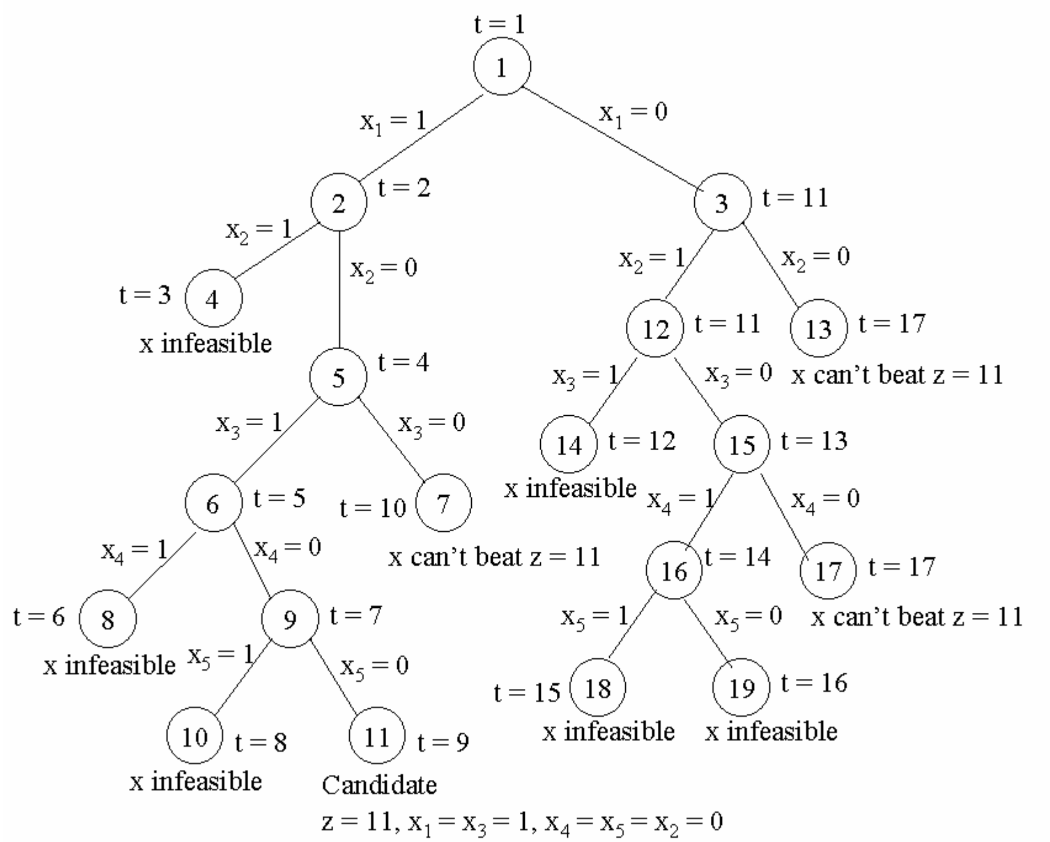


2. Az 1-es csúcs legjobb befejezése ($x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $z = 3$) lehetséges megoldást ad, tehát optimális.

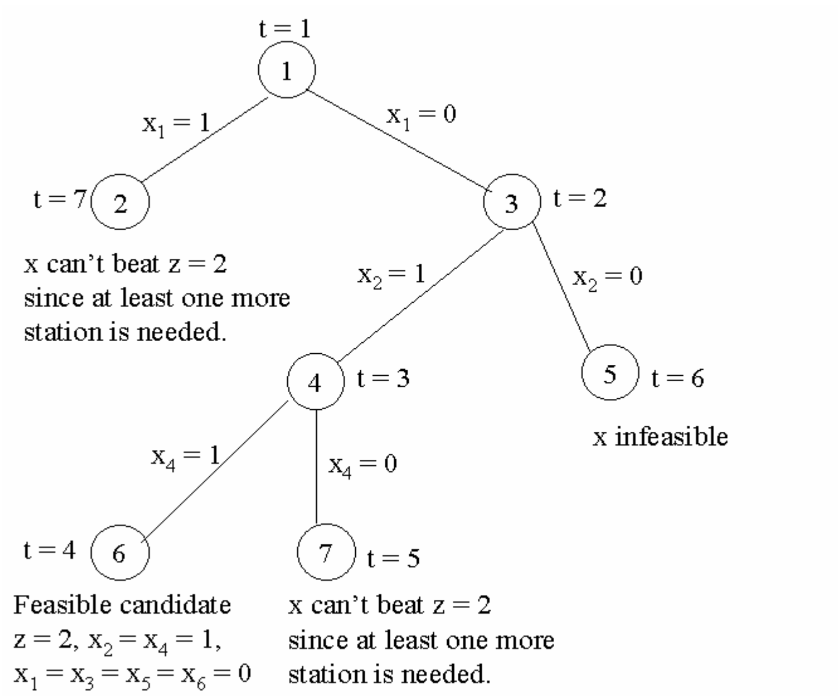
3. Legyen $x_i = 1$ ha az i projektet kiválasztják, $x_i = 0$ egyébként. Ekkor az IP modell:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 2x_5 \\ \text{f.h} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \le 1, \quad x_3 + x_4 \le 1, \quad x_2 \le x_5 \\ & \text{mindegyik } x_i = 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

A megoldási fából látjuk, hogy egy optimális megoldás:
$z = 11$, $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = x_5 = 0$.



4. A megoldási fából látjuk, hogy egy optimális megoldás: $z = 2$, $x_2 = x_4 = 1$, $x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$.



5. Az $x_1 = 0$ ágon nincs lehetséges befejezés. Az $x_1 = 1$ ágból származó ágak sem egészíthetők ki lehetséges megoldássá. Könnyű látni, hogy a probléma azért megoldhatatlan, mert mind a négy védőnek játszania kell, de az ő lepattanószerzési képességük

összege 6, így akárki is az ötödik kezdőjátékos, a kezdőcsapat lepattanószerzési képessége legfeljebb 9, ami nem éri el a kívánatos 5(2) = 10-es összeget.

6. Tegyük fel, hogy van két különböző reprezentáció. Ekkor
$u_n'2^n + u_{n-1}'2^{n-1} + \ldots + 2u_1' + u_0' = u_n 2^n + u_{n-1}2^{n-1} + \ldots + 2u_1 + u_0$
és valamilyen k-ra $u_k \neq u_k'$ de $u_m = u_m'$ minden m>k-ra. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $u_k = 1$ és $u_k' = 0$. Ekkor fenn kell állnia az

$$(1) \quad 2^k + u_{k-1}2^{k-1} + \ldots + 2u_1 + u_0 = u_{k-1}'2^{k-1} + \ldots + 2u_1' + u_0'$$

egyenlőségnek. Ugyanakkor, mivel

$$u_{k-1}'2^{k-1} + \ldots + 2u_1' + u_0' \leq 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1 = 2^k - 1 < 2^k,$$

az (1) jobboldala biztosan kisebb mint a baloldala. Ez az ellentmondás mutatja, hogy egy egész számnak nem lehet két különböző binaries reprezentációja.

8.8 Alfejezet

1. Mivel az optimális táblában mindkét feltétel kiegészítésének törtrésze 1/2, önkényesen az első feltételt használjuk vágásra:

$$x_2 + 7s_1/22 + s_2/22 = 3 + 1/2 \quad \text{vagy}$$
$$x_2 - 3 = 1/2 - 7s_1/22 - s_2/22 \quad \text{vagy}$$
$$1/2 - 7s_1/22 - s_2/22 \leq 0.$$

A feladatot ezzel a feltétellel, a feltételt pedig az s_3 eltérésváltozóval kiegészítve a következő táblához jutunk:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Jobboldal
1	0	0	56/11	30/11	0	126
0	0	1	7/22	1/22	0	7/2
0	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
0	0	0	-7/22	-1/22	1	-1/2

A duál szimplex pivot szabályt követve az s_1 változó lép be a 3. sorba:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Jobboldal
1	0	0	0	2	16	118
0	0	1	0	0	1	3
0	1	0	0	1/7	-1/7	32/7
0	0	0	1	1/7	-22/7	11/7

Önkényesen a 2. sort választjuk a következő vágáshoz:

$x_1 + s_2/7 - s_3 + 6s_3/7 = 4/7 + 4$ vagy
$x_1 - s_3 -4 = 4/7 - s_2/7 -6s_3/7$ vagy
$-s_2/7 - 6s_3/7 \le -4/7$.

A vágást az s_4 eltérésváltozóval kiegészítve a következő táblához jutunk:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Jobboldal
1	0	0	0	2	16	0	118
0	0	1	0	0	1	0	3
0	1	0	0	1/7	-1/7	0	32/7
0	0	0	1	1/7	-22/7	0	11/7
0	0	0	0	-1/7	-6/7	1	-4/7

Beléptetve az s_2 –t az utolsó sorba a következő (optimális) táblához jutunk:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Jobboldal
1	0	0	0	0	4	14	110
0	0	1	0	0	1	0	3
0	1	0	0	0	-1	1	4
0	0	0	1	0	-4	1	1
0	0	0	0	1	6	-7	4

Ebből a táblából leolvashatjuk, hogy az az optimális megoldás:
$z = 110$ $x_1 = 4$ $x_2 = 3$.

2. Mivel a második feltétel eltérésének törtrésze van legközelebb az 1/2 -hez, ebből generáljuk a vágást:

$x_2 + e_1/5 - e_2 + 2e_2/5 = 1 + 3/5$ vagy
$x_2 - e_2 - 1 = 3/5 - 2e_2/5 - e_1/5$ vagy
$3/5 - 2e_2/5 - e_1/5 \le 0$.

Az s_3 eltérésváltozó bevezetésével kapjuk a következő táblát:

z	x_1	x_2	e_1	e_2	s_3	Jobboldal
1	0	0	-4/5	-18/5	0	88/5
0	1	0	-2/5	1/5	0	4/5
0	0	1	1/5	-3/5	0	8/5
0	0	0	-1/5	-2/5	1	-3/5

Beléptetve az e_1 változót a következő (optimális) táblát kapjuk:

z	x_1	x_2	e_1	e_2	s_3	Jobboldal
1	0	0	0	-2	-4	20
0	1	0	0	1	-2	2
0	0	1	0	-1	1	1
0	0	0	1	2	-5	3

Az optimális megoldás: $z = 20$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

3. A második sorból származtatjuk a vágást:

$x_2 + s_1/3 + s_2/6 = 2 + 1/2$ vagy
$x_2 - 2 = 1/2 - s_1/3 - s_2/6$ vagy
$1/2 - s_1/3 - s_2/6 + s_3 \leq 0$.

Az s_3 eltérésváltozó bevezetésével a következő táblához jutunk:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Jobboldal
1	0	0	-2/3	-5/6	0	-15/2
0	1	0	1/3	-1/12	0	5/4
0	0	1	1/3	1/6	0	5/2
0	0	0	-1/3	-1/6	1	-1/2

Az s_1 beléptetése után a következő táblát kapjuk:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Jobboldal
1	0	0	0	-1/2	-2	-13/2
0	1	0	0	-1/4	1	3/4
0	0	1	0	0	1	2
0	0	0	1	1/2	-3	3/2

Az utolsó feltételből származtatjuk a vágást:

$s_1 + s_2/2 - 3s_3 = 1 + 1/2$ vagy
$s_1 - 3s_3 - 1 = 1/2 - s_2/2$ vagy
$1/2 - s_2/2 \leq 0$ vagy az s_4 eltérésváltozóval kiegészítve
$1/2 - s_2/2 + s_4 = 0$.

Ezt a megkötést hozzáadva az eddigiekhez a következő táblát kapjuk:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Jobboldal
1	0	0	0	-1/2	-2	0	-13/2

0	1	0	0	-1/4	1	0	3/4
0	0	1	0	0	1	0	2
0	0	0	1	1/2	-3	0	3/2
0	0	0	0	-1/2	0	1	-1/2

Az s_2 beléptetése után a következő (optimális) táblához jutunk:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Jobboldal
1	0	0	0	0	-2	-1	-6
0	1	0	0	0	1	-1/2	1
0	0	1	0	6	1	0	2
0	0	0	1	0	-3	1	1
0	0	0	0	1	0	-2	1

Az optimális megoldás: $z = -6$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Áttekintő feladatok

1. Legyen $z_t = 1$ ha van termelés a t-edik negyedévben, $z_t = 0$ egyébként. A célfüggvényhez adjuk hozzá a $+200(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$ tagot, és vegyük fel

$$x_1 + y_1 \le Mz_1$$
$$x_2 + y_2 \le Mz_2$$
$$x_3 + y_3 \le Mz_3$$
$$x_4 + y_4 \le Mz_4$$

feltételeket. Az M = 200 például egy megfelelő választás.

2. Közelítsük y^2-et a $z_1(0)^2 + z_2(.25)^2 + z_3(.50)^2 + z_4(.75)^2 + z_5(1)^2$ kifejezéssel, az x^2-et pedig a $z_1'(0)^2 + z_2'(.25)^2 + z_3'(.50)^2 + z_4'(.75)^2 + z_5'(1)^2$ kifejezéssel. Ekkor egy alkalmas IP az alábbi:

$$\max z = 3(z_1'(0)^2 + z_2'(.25)^2 + z_3'(.50)^2 + z_4'(.75)^2 + z_5'(1)^2) + z_1(0)^2 + z_2(.25)^2 + z_3(.50)^2 + z_4(.75)^2 + z_5(1)^2$$

f.h. $z_1 \le y_1,\ z_2 \le y_1+y_2,\ z_3 \le y_2+y_3,\ z_4 \le y_3+y_4,\ z_5 \le y_4$
$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 1,\quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$
$z_1' \le y_1',\ z_2' \le y_1'+y_2',\ z_3' \le y_2'+y_3',\ z_4' \le y_3'+y_4',\ z_5' \le y_4'$
$z_1' + z_2' + z_3' + z_4' + z_5' = 1,\quad y_1' + y_2' + y_3' + y_4' = 1$
mindegyik y_i és $y_i' = 0$ vagy 1,
minden más változó ≥ 0

Ezen IP optimális megoldásából a következő közelítést kapjuk az x és y optimális értékére: $y = .25z_2 + .50z_3 + .75z_4 + z_5$ és $x = .25z_2' + .50z_3' + .75z_4' + z_5'$.

3. Legyen $z_i = 1$ ha az i-edik tornász mindkét szeren indul
$z_i = 0$ különben
$x_i = 1$ ha az i-edik tornász csak gerendán indul
$x_i = 0$ különben
$y_i = 1$ ha az i-edik tornász csak talajon indul
$y_i = 0$ különben
Ekkor az alábbi egy alkalmas IP:

$$\max z = 16.7z_1 + 17.7z_2 + \ldots 17.7z_6 + 8.8x_1 + \ldots 9.1x_6 + 7.9y_1 + \ldots\ 8.6y_6$$

f.h.
$$z_1 + z_2 + \ldots + z_6 = 3$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 1$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_6 = 1$$
$$x_1 + y_1 + z_1 \le 1$$
$$x_2 + y_2 + z_2 \le 1$$
$$x_3 + y_3 + z_3 \le 1$$
$$x_4 + y_4 + z_4 \le 1$$
$$x_5 + y_5 + z_5 \le 1$$
$$x_6 + y_6 + z_6 \le 1$$
mindegyik változó = 0 vagy 1

4. Legyen $x_{ij} = 1$ ha az i-edik körzetből a diákokat a j-edik iskolába küldik, $x_{ij} = 0$ egyébként.
Ekkor az alábbi egy alkalmas IP:

$$\text{Min } z = 110x_{11} + 220x_{12} + 37.5x_{21} + 127.5x_{22} + 80x_{31} + 80x_{32} + 117x_{41} + 36x_{42} + 135x_{51} + 54x_{52}$$

f.h.
$$110x_{11} + 75x_{21} + 100x_{31} + 90x_{41} + 90x_{51} \ge 150$$
$$110x_{12} + 75x_{22} + 100x_{32} + 90x_{42} + 90x_{52} \ge 150$$

$$.20 \le \frac{30x_{11} + 5x_{21} + 10x_{31} + 40x_{41} + 30x_{51}}{110x_{11} + 75x_{21} + 100x_{31} + 90x_{41} + 90x_{51}}$$
vagy $0 \le 8x_{11} - 10x_{21} - 10x_{31} + 22x_{41} + 12x_{51}$

$$.20 \le \frac{30x_{12} + 5x_{22} + 10x_{32} + 40x_{42} + 30x_{52}}{110x_{12} + 75x_{22} + 100x_{32} + 90x_{42} + 90x_{52}}$$
vagy $0 \le 8x_{12} - 10x_{22} - 10x_{32} + 22x_{42} + 12x_{52}$

$x_{11} + x_{12} = 1$, $x_{21} + x_{22} = 1$, $x_{31} + x_{32} = 1$
$x_{41} + x_{42} = 1$, $x_{51} + x_{52} = 1$
mindegyik változó = 0 vagy 1

5. Legyen $x_1 = 1$ ha RS-t leigazolják
$x_1 = 0$ különben
$x_2 = 1$ ha BS-t leigazolják
$x_2 = 0$ különben
$x_3 = 1$ ha DE-t leigazolják
$x_3 = 0$ különben
$x_4 = 1$ ha ST-t leigazolják
$x_4 = 0$ különben
$x_5 = 1$ ha TS-t leigazolják
$x_5 = 0$ különben

$$\max z = 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5$$
f.h. $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \le 12 \quad (1)$

$$x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \le 2 \quad (3)$$
$$x_1 + x_2 \le 1 \quad (4)$$

mindegyik változó = 0 vagy 1

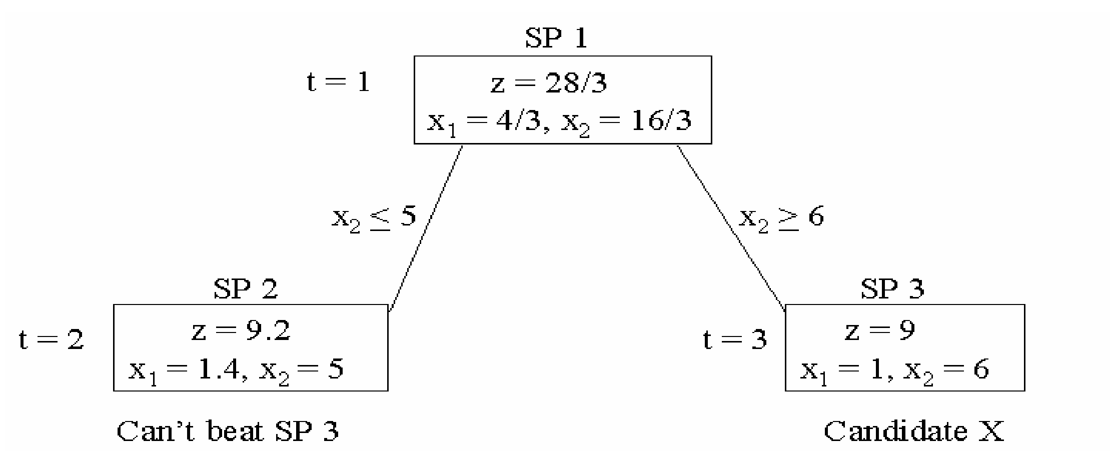
6. Legyen y_i = 1 ha vásárolunk számítógépet az i szállítótól
y_i = 0 egyébként
x_i = ahány számítógépet vásárolunk az i szállítótól

$$\min z = 500x_1 + 350x_2 + 250x_3 + 5000y_1 + 4000y_2 + 6000y_3$$

f.h.
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1100$$
$$x_1 \le 500y_1$$
$$x_2 \le 900y_2$$
$$x_3 \le 400y_3$$

minden y_i = 0 vagy 1, minden $x_j \ge 0$

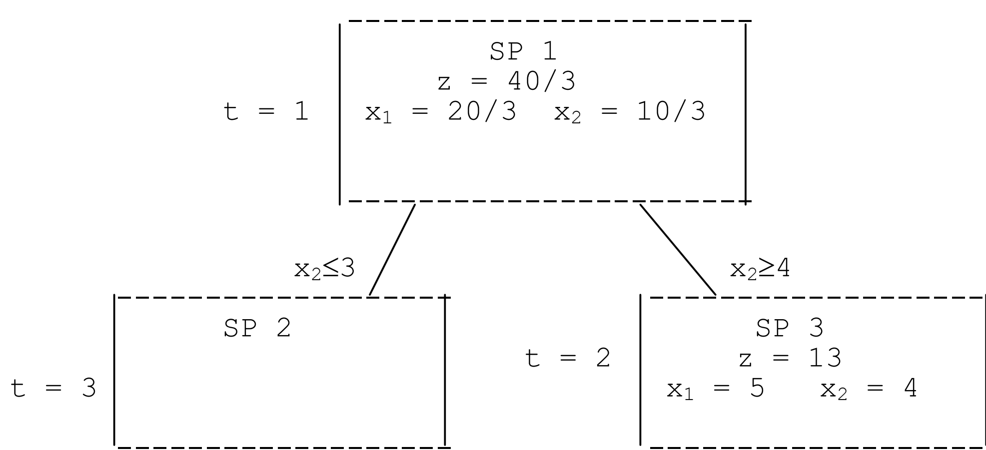
7.



The optimal solution is $z = 9$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

8. Mivel az LP lazítás optimális megoldása $z = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ lehetséges megoldása az IP-nek, így optimális megoldása is.

9.



A megoldási fából látjuk, hogy az optimális megoldás: $z = 13$, x_1

= 5, x_2 = 4. Vegyük észre, hogy minden lehetséges megoldás egész z-értéket ad. Mivel az SP 1 optimuma z = 13 1/3, az SP 3 részfeladat z = 13 optimuma azt jelenti, hogy az ott talált megoldás-jelölt a feladat egy optimális megoldása. Az SP 2 részfeladatot tehát nem szükséges megoldani (hacsak nem vagyunk kíváncsiak az esetleges alternatív optimális megoldás(ok)ra).

10. Legyen x_i = ahány darab i centest használunk fel. Ekkor az IP:

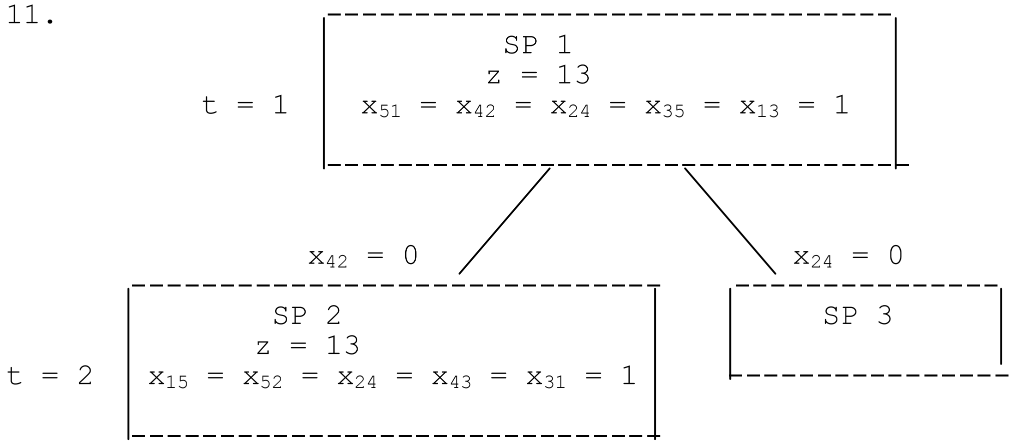
$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_5 + x_{10} + x_{20} + x_{25} + x_{50} \\ \text{f.h.}\quad & x_1 + 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} + 25x_{25} + 50x_{50} = 91 \\ & x_i \geq 0,\ x_i \text{ egész} \end{aligned}$$

A feladat megoldása 81 elágaztatást igényel. Ha rájövünk, hogy 1 centest mindenképpen kell használnunk, sőt pontosan egy darabot a feladat a következőre egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \min z &= x_5 + x_{10} + x_{20} + x_{25} + x_{50} \\ \text{f.h.}\quad & 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} + 25x_{25} + 50x_{50} = 90 \\ & x_i \geq 0,\ x_i \text{ egész} \end{aligned}$$

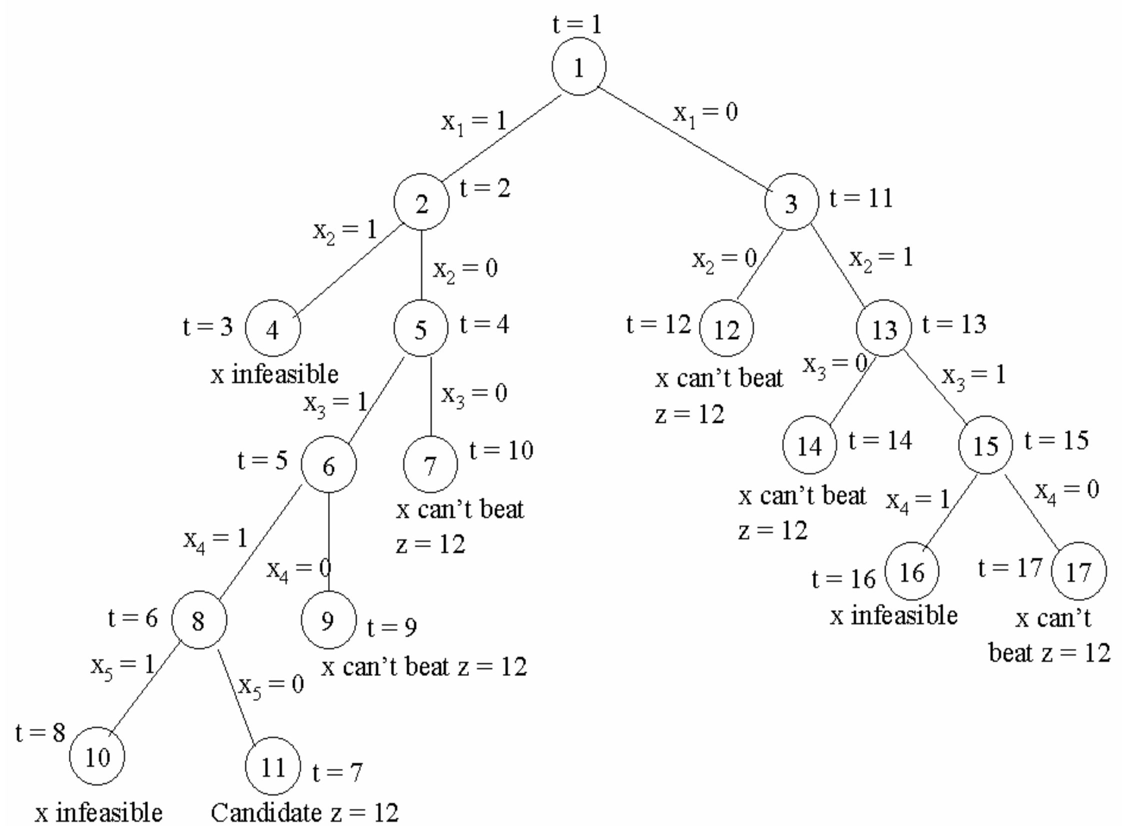
A 90¢-es probléma optimális megoldása (ami egyébként 8 részfeladat generálását igényli): z = 3, x_{20} = 2, x_{50} = 1. Tehát a 91¢-es probléma optimális megoldása: z = 3 + 1, x_1 = 1, x_{20} = 2, x_{50} = 1.

11.



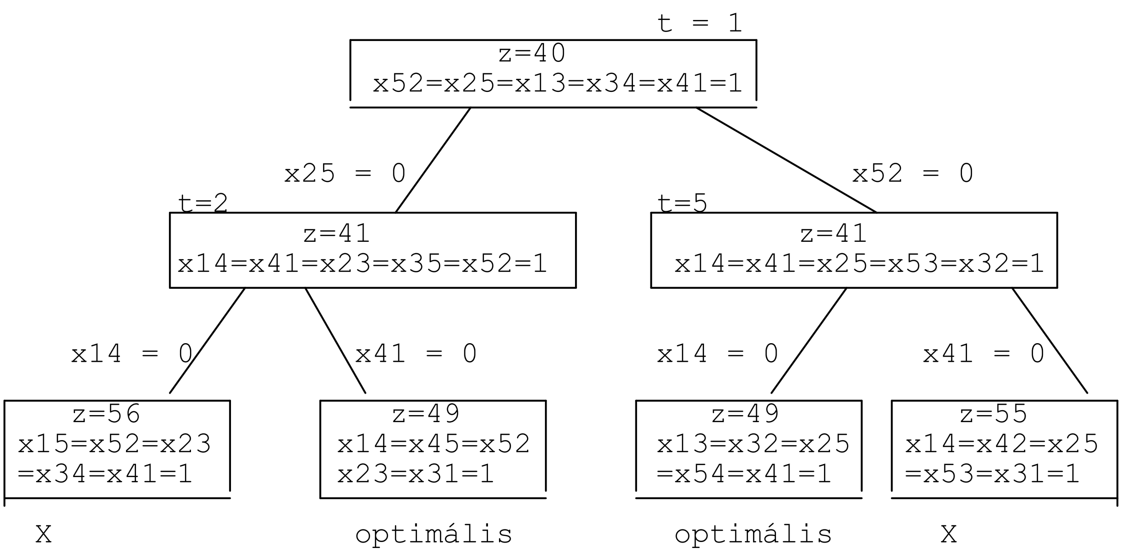
Az SP 2 részfeladat az 1-5-2-4-3-1 lehetséges megoldást adja. Mivel ennek a z-értéke azonos a kiinduló SP 1 z-értékével, így az adott utazó ügynök probléma optimális megoldásának kell lennie. Következésképpen az SP 3 megoldására nincs szükség.

12. Az alábbi megoldási fából látszik, hogy az 5. áttekintő feladat optimális megoldása: z = 12, $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $x_2 = x_5 = 0$. A baseball csapatnak tehát RS-t, DE-t és ST-t kell leigazolnia.



13. Számos iteráció után azt kapjuk, hogy a problémának nincs lehetséges megoldása.

14. Az optimális megoldások: 1-4-5-2-3-1 illetve 1-3-2-5-4-1 (ezekben a viszonylatokban a távolságok szimmetrikusak). A minimális össztávolság: 49.



15. Legyen xi = 1 ha az i sebészt kiválasztjuk, xi = 0 ha nem.

min z = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6
 f.h.   x1 + x4 ≥ 1

$x1 + x5 \geq 1$
$x2 + x3 \geq 1$
$x1 + x6 \geq 1$
$x2 + x3 + x6 \geq 1$
$x2 + x4 \geq 1$
$x1 + x2 \leq 1$
mindegyik $x_i = 0$ vagy 1

16. Legyen Xi = ahány akkumulátort készítenek havonta az i-edik üzemben; Yi = 1 ha az i-edik üzem termel, Yi = 0 különben.

min z = 80,000Y1 + 40,000Y2 + 30,000Y3 + 20X1 + 25X2 + 30X3
f.h. X1 + X2 + X3 = 12000, X1 ≤ 6000Y1, X2 ≤ 7000Y2, X3 ≤ 6000Y3,
X1, X2, X3 ≥ 0, Y1, Y2, Y3 = 0 vagy 1

17. Legyen Ai = ahány tonna i ötvözetet vásárolnak;
Yi = 1 ha az i-edik bugát megveszik, Yi = 0 ha nem;
Xi = ahány tonnát felhasználnak az i-edik bugából a megrendelés teljesítéséhez;
S = ahány tonna ócskavasat használnak a megrendelés teljesítéséhez.

A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MIN  1750 Y1 + 990 Y2 + 1240 Y3 + 1680 Y4 + 500 A1 + 450 A2
     + 400 A3 + 100 S
 SUBJECT TO
     2)   A1 + A2 + A3 + S + X1 + X2 + X3 + X4 =    25
     3)   0.08 A1 + 0.07 A2 + 0.06 A3 + 0.03 S + 0.05 X1 + 0.04
X2
        + 0.05 X3 + 0.03 X4 =    1.25
     4)   0.06 A1 + 0.07 A2 + 0.08 A3 + 0.09 S + 0.03 X1 + 0.03
X2
        + 0.04 X3 + 0.04 X4 =    1.25
     5) - 5 Y1 + X1 <=   0
     6) - 3 Y2 + X2 <=   0
     7) - 4 Y3 + X3 <=   0
     8) - 6 Y4 + X4 <=   0

 OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)      8484.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000        930.000000
        Y2         1.000000        774.000000
        Y3         0.000000        504.000000
        Y4         1.000000       1680.000000
        A1         7.400000          0.000000
        A2         0.000000         21.999996
        A3         0.000000         44.000015
         S         3.640000          0.000000
        X1         5.000000          0.000000
        X2         3.000000          0.000000
        X3         0.000000          0.000000
        X4         5.960000          0.000000
```

18. Legyen Xij = 1 ha az i reaktor a j beállítással működik, Xij = 0 különben. A megoldást az alábbi LINDO output tartalmazza:

```
MIN  50 X11 + 80 X12 + 100 X13 + 65 X21 + 90 X22 + 120 X23
   + 70 X31 + 90 X32 + 110 X33 + 40 X41 + 60 X42 + 70 X43
 SUBJECT TO
     2)   X11 + X12 + X13 <=   1
     3)   X21 + X22 + X23 <=   1
     4)   X31 + X32 + X33 <=   1
     5)   X41 + X42 + X43 <=   1
     6)    80 X11 + 140 X12 + 170 X13 + 100 X21 + 140 X22 + 215
X23
       + 112 X31 + 153 X32 + 195 X33 + 65 X41 + 105 X42 + 130
X43
       >=   359

 OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      210.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11         0.000000         50.000000
       X12         0.000000         80.000000
       X13         1.000000        100.000000
       X21         0.000000         65.000000
       X22         0.000000         90.000000
       X23         0.000000        120.000000
       X31         0.000000         70.000000
       X32         0.000000         90.000000
       X33         1.000000        110.000000
       X41         0.000000         40.000000
       X42         0.000000         60.000000
       X43         0.000000         70.000000
```

19. Legyen Xt = ahány munkadarab készül a t-edik műszak alatt (a műszakok indexelése az időrendet követi); It= a raktárkészlet a t-edik műszak végén; Yt=1 ha van termelés a t-edik műszak alatt, Yt = 0 különben. A LINDO outputból látjuk, hogy az átlagos készletszint = 2000/4 = 500.

```
MIN   8000 Y1 + 4500 Y2 + 8000 Y3 + 4500 Y4 + I1 + I2 + I3 + I4
  SUBJECT TO
      2)   I1 - X1 =  - 2000
      3) - I1 + I2 - X2 =  - 3000
      4) - I2 + I3 - X3 =  - 2000
      5) - I3 + I4 - X4 =  - 3000
      6) - 10000 Y1 + X1 <=   0
      7) - 10000 Y2 + X2 <=   0
      8) - 10000 Y3 + X3 <=   0
      9) - 10000 Y4 + X4 <=   0

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      19000.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000       8000.000000
        Y2         1.000000       4500.000000
        Y3         0.000000      -2000.000000
        Y4         1.000000       4500.000000
        I1         0.000000          1.000000
        I2      2000.000000          0.000000
        I3         0.000000          2.000000
        I4         0.000000          1.000000
```

```
        X1      2000.000000         0.000000
        X2      5000.000000         0.000000
        X3         0.000000         0.000000
        X4      3000.000000         0.000000
```

20. A 19. feladatbeliekkel azonos értelmezésű változókat használó alábbi LINDO outputból kiderül, hogy az átlagos készletszint = (3000+3000)/4 = 1500. Vagyis a beindítási költségek csökkentése nem feltétlenül csökkenti a raktárkészletet. Ennek oka itt az, hogy a nappali műszak kellően olcsóvá vált ahhoz, hogy ne használjuk az éjszakai műszakot, hanem az akkor felmerülő igényt raktárból elégítsük ki, s ez megemeli a készletszintet.

```
MIN   1000 Y1 + 3500 Y2 + 1000 Y3 + 3500 Y4 + I1 + I2 + I3 + I4
  SUBJECT TO
      2)   I1 - X1 =  - 2000
      3) - I1 + I2 - X2 =  - 3000
      4) - I2 + I3 - X3 =  - 2000
      5) - I3 + I4 - X4 =  - 3000
      6) - 10000 Y1 + X1 <=   0
      7) - 10000 Y2 + X2 <=   0
      8) - 10000 Y3 + X3 <=   0
      9) - 10000 Y4 + X4 <=   0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)      8000.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000       1000.000000
        Y2         0.000000      -6500.000000
        Y3         1.000000       1000.000000
        Y4         0.000000      -6500.000000
        I1      3000.000000          0.000000
        I2         0.000000          2.000000
        I3      3000.000000          0.000000
        I4         0.000000          2.000000
        X1      5000.000000          0.000000
        X2         0.000000          0.000000
        X3      5000.000000          0.000000
        X4         0.000000          0.000000
```

21. Legyen x_i = 1 ha van mentőállomás az i-edik kerületben, x_i = 0 egyébként; y_i = 1 ha az i-edik kerület 2 percen belül elérhető egy mentőautóval, y_i = 0 egyébként. Ekkor a következő IP megfelelő (a célfüggvény értéke ezer dollárban értendő):

$$\max z = 40y_1 + 30y_2 + 35y_3 + 20y_4 + 15y_5 + 50y_6 + 45y_7 + 60y_8$$
$$\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \le 2$$

és mindegyik kerületre kellenek olyan feltételek amelyek leírják az összefüggést az x illetve y változók között. Például a 3. kerület 2 percen belül a 3., 4. és 5. kerületekből érhető el, garantálnunk kell tehát, hogy ha $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, akkor $y_3 = 0$. Ezzel ekvivalens megfogalmazások: $x_3 + x_4 + x_5 \le 0$ –ból következzen $y_3 = 0$; vagy $x_3 + x_4 + x_5 < 1$ –ból következzen $-y_3 \ge 0$; vagy $-x_3-x_4-x_5 > -1$ –ból következzen $-y_3 \ge 0$.
Ezt elérhetjük a következő két feltétel hozzáadásával:

$y_3 \le Mz_3$ és $1-x_3-x_4-x_5 \le (1-z_3)M$ (, ahol M = 1 megfelelő)
mindegyik változó = 0 vagy 1.

22. Legyen x_{ij} = az az időpont amikor az i-edik munkát elkezdik a j-edik gépen.
A következő 5 feltétel biztosítja, hogy egy munka nem kerülhet addig egy gépre míg az összes előző munkafázis be nem fejeződött:

$$x_{13} \ge x_{11} + 20$$
$$x_{14} \ge x_{13} + 25$$
$$x_{22} \ge x_{21} + 15$$
$$x_{24} \ge x_{22} + 20$$
$$x_{33} \ge x_{32} + 35$$

Az alábbi feltételek azt garantálják, hogy minden időpontban bármelyik gépen legfeljebb egy munka végezhető. Például az 1-es gép esetében ez azt jelenti, hogy vagy $x_{11} + 20 \le x_{21}$ (az 1-es munka után jöhet csak a 2-es munka) vagy $x_{21} + 15 \le x_{11}$ (a 2-es munka megelőzi az 1-est) teljesüljön. A (26) és (27) mintájára vegyük tehát fel a következő feltételeket:

$$x_{11} + 20 - x_{21} \le My_1$$
$$x_{21} + 15 - x_{11} \le M(1 - y_1)$$
$$y_1 = 0 \text{ vagy } 1$$

A 2-es gépre a hasonló feltételek:

$$x_{22} + 20 - x_{32} \le My_2$$
$$x_{32} + 35 - x_{22} \le M(1 - y_2)$$
$$y_2 = 0 \text{ vagy } 1$$

A 3-as gépre pedig:

$$x_{13} + 25 - x_{33} \le My_3$$
$$x_{33} + 28 - x_{13} \le M(1 - y_3)$$
$$y_3 = 0 \text{ vagy } 1$$

Végül a 4-es gépre:

$$x_{24} + 18 - x_{14} \le My_4$$
$$x_{14} + 30 - x_{24} \le M(1 - y_4)$$
$$y_4 = 0 \text{ vagy } 1$$

Továbbá, minden $x_{ij} \ge 0$.

Mivel az 1-es munka befejezési időpontja = $x_{14} + 30$
a 2-es munka befejezési időpontja = $x_{24} + 18$
a 3-as munka befejezési időpontja = $x_{33} + 28$,
a célfüggvény

$$\min z = (x_{14} + 30 + x_{24} + 18 + x_{33} + 28)/3 \quad \text{vagy}$$
$$\min z = (x_{14} + x_{24} + x_{33})/3 .$$

23. Legyen x_{it} = 1 ha az i-edik bevallást elkezdik a t-edik héten
x_{it} = 0 különben
o_t' = ahány túlórára van szükség a t-edik héten
o_t'' = ahány munkaórára nincs szükség a t-edik héten a rendelkezésre álló 160 rendes munkaórából
Ekkor egy megfelelő IP:

$$\min z = 100(o_1' + o_2' + o_3' + o_4' + o_5' + o_6' + o_7' + o_8')$$

f.h. $x_{11} + x_{12} + \ldots x_{16} = 1$
$x_{21} + x_{22} + \ldots x_{25} = 1$ (mind az 5 bevallást
$x_{31} + x_{32} + \ldots x_{36} = 1$ határidőre
$x_{41} + x_{42} + \ldots x_{47} = 1$ el kell készíteni)
$x_{51} + x_{52} + \ldots x_{55} = 1$

Következnek a heti terhelésre vonatkozó feltételek, ezek általános formája: a t-edik heti munkaidő-igény = $160 + o_t' - o_t''$

$120x_{11} + 160x_{21} + 80x_{31} + 80x_{41} + 100x_{51} = 160 + o_1' - o_1''$
$120(x_{11} + x_{12}) + 160(x_{21} + x_{22}) + 80(x_{31} + x_{32}) + 80(x_{41} + x_{42})$
$+ 100(x_{51} + x_{52}) = 160 + o_2' - o_2''$
$120(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 160(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 80(x_{31} + x_{32} + x_{33})$
$+ 80(x_{42} + x_{43}) + 100(x_{51} + x_{52} + x_{53}) = 160 + o_3' - o_3''$
$120(x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 160(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24})$
$+ 80(x_{32} + x_{33} + x_{34}) + 80(x_{43} + x_{44})$
$+ 100(x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54}) = 160 + o_4' - o_4''$
$120(x_{13} + x_{14} + x_{15}) + 160(x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25})$
$+ 80(x_{33} + x_{34} + x_{35}) + 80(x_{44} + x_{45})$
$+ 100(x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55}) = 160 + o_5' - o_5''$
$120(x_{14} + x_{15} + x_{16}) + 160(x_{23} + x_{24} + x_{25}) + 80(x_{34} + x_{35} + x_{36})$
$+ 80(x_{45} + x_{46}) + 100(x_{53} + x_{54} + x_{55}) = 160 + o_6' - o_6''$
$120(x_{15} + x_{16}) + 160(x_{24} + x_{25}) + 80(x_{35} + x_{36})$
$+ 80(x_{46} + x_{47}) + 100(x_{54} + x_{55}) = 160 + o_7' - o_7''$
$120x_{16} + 160x_{25} + 80x_{36} + 80x_{47} + 100x_{55} = 160 + o_8' - o_8''$.
minden $x_{it} = 0$ vagy 1; minden o_t' , $o_t'' \geq 0$; minden $o_t' \leq 80$

24. Legyen $x_{it} = 1$ ha az i-edik erőmű megépül a t-edik év elején,
$x_{it} = 0$ különben

Ekkor egy alkalmas IP:

$$\min z = 20 \sum_{t=1}^{t=5} x_{1t} + 16 \sum_{t=1}^{t=5} x_{2t} + 18 \sum_{t=1}^{t=5} x_{3t} + 14 \sum_{t=1}^{t=5} x_{4t}$$
$$+ 7.5x_{11} + 6x_{12} + 4.5x_{13} + 3x_{14} + 1.5x_{15}$$
$$+ 4x_{21} + 3.2x_{22} + 2.4x_{23} + 1.6x_{24} + .8x_{25}$$
$$+ 6.5x_{31} + 5.2x_{32} + 3.9x_{33} + 2.6x_{34} + 1.3x_{35}$$
$$+ 3x_{41} + 2.4x_{42} + 1.8x_{43} + 1.2x_{44} + .6x_{45}$$

f.h. $\sum_{t=1}^{t=5} x_{1t} \leq 1$

$\sum_{t=1}^{t=5} x_{2t} \leq 1$

$\sum_{t=1}^{t=5} x_{3t} \leq 1$

$\sum_{t=1}^{t=5} x_{4t} \leq 1$

$70x_{11} + 50x_{21} + 60x_{31} + 40x_{41} \geq 80$ (1. évi igény)

$$70(x_{11} + x_{12}) + 50(x_{21} + x_{22}) + 60(x_{31} + x_{32}) + 40(x_{41} + x_{42}) \geq 100 \quad \text{(2. évi igény)}$$

$$70(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 50(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 60(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 40(x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 120 \quad \text{(3. évi igény)}$$

$$70(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 50(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + 60(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) + 40\ (x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44}) \geq 140 \quad \text{(4. évi igény)}$$

$$70(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) + 50(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) + 60(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35}) + 40(x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45}) \geq 160 \quad \text{(5. évi igény)}$$

minden változó = 0 vagy 1

25. $$\min z = 1.5 \sum_{t=1}^{t=5} x_{1t} + .8 \sum_{t=1}^{t=5} x_{2t} + 1.3 \sum_{t=1}^{t=5} x_{3t}$$

$$+ 0.6 \sum_{t=1}^{t=5} x_{4t} + 1.7 \sum_{t=1}^{t=4} y_{1t} + 1.2 \sum_{t=1}^{t=4} y_{2t} + 1.3 \sum_{t=1}^{t=4} y_{3t}$$

$$+ 0.8 \sum_{t=1}^{t=4} y_{4t} + 1.9 \sum_{t=1}^{t=5} z_{1t} + 1.5 \sum_{t=1}^{t=5} z_{2t} + 1.6 \sum_{t=1}^{t=5} z_{3t}$$

$$+ 1.1 \sum_{t=1}^{t=5} z_{4t}$$

f.h $70x_{1t} + 50x_{2t} + 60x_{3t} + 40x_{4t} \geq$ t. évi igény $(t = 1,2,3,4,5)$

Az alábbi feltételek biztosítják, hogy ha az i-edik erőművet leállítják a t-edik év végén, akkor $y_{it} = 1$:

$1 - y_{it} \leq w_t$, $x_{it} - x_{i,t+1} \leq 1 - w_t$ $(i,t = 1,2,3,4)$

Az alábbi feltételek biztosítják, hogy ha az i-edik erőművet újraindítják a t-edik év elején, akkor $z_{it} = 1$:

$1 - z_{it} \leq w_t'$, $x_{it} - x_{i,t-1} \leq 1 - w_t'$ $(i = 1,2,3,4)$ $(t = 2,3,4,5)$

minden változó = 0 vagy 1

26. Legyen $x_{it} = 1$ ha az i-edik épületet elkezdik a t-edik évben,
$x_{it} = 0$ egyébként.
Ekkor egy alkalmas IP:

$\max z = 100x_{11} + 50x_{12} + 60x_{21} + 30x_{22} + 40x_{31}$ (ezer dollárban)

f.h. $30x_{11} + 20x_{21} + 20x_{31} \leq 60$ (1. év)

$30(x_{11} + x_{12}) + 20(x_{21} + x_{22}) + 20(x_{31} + x_{32}) \leq 60$ (2. év)

$30(x_{12} + x_{13}) + 20(x_{22} + x_{23}) + 20(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \leq 60$ (3. év)

$30(x_{13} + x_{14}) + 20(x_{23} + x_{24}) + 20(x_{32} + x_{33} + x_{34}) \leq 60$ (4. év)

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 1$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 1$ (évenként legfeljebb egy épület indul)

$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 1$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1$ (épületenként legfeljebb egy kezdés)

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$ (a 2. épület a 4. év végére elkészül)

minden változó = 0 vagy 1

27. Legyen $y_i = 1$ ha az i-edik furgont használják,
$y_i = 0$ ha nem;
$x_{ij} = 1$ ha az i-edik furgon szállít a j-edik üzletbe,
$x_{ij} = 0$ ha nem.

Ekkor egy alkalmas IP:

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 45y_1 + 50y_2 + 55y_3 + 60y_4 \\
\text{f.h. } & 100x_{11} + 200x_{12} + 300x_{13} + 500x_{14} + 800x_{15} \leq 400y_1 \\
& 100x_{21} + 200x_{22} + 300x_{23} + 500x_{24} + 800x_{25} \leq 500y_2 \\
& 100x_{31} + 200x_{32} + 300x_{33} + 500x_{34} + 800x_{35} \leq 600y_3 \\
& 100x_{41} + 200x_{42} + 300x_{43} + 500x_{44} + 800x_{45} \leq 1100y_4 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1
\end{aligned}
$$

mindegyik változó = 0 vagy 1

28. Legyen yi = 1 ha van auditor az i városban (1 = NY, 2 = Chicago, 3 = LA, 4 = Atlanta), yi = 0 különben.
Továbbá legyen xij = az i városban állomásozó auditornak a j körzetbe tett utazásainak száma (j = 1 Északkelet, stb.)
Ekkor a következő egy megfelelő modell:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } z = {} & 100{,}000(y1+y2+y3+y4) \\
& + 1100x11 + 1400x12 + 1900x13 + 1400x14 \\
& + 1200x21 + 1000x22 + 1500x23 + 1200x24 \\
& + 1900x31 + 1700x32 + 1100x33 + 1400x34 \\
& + 1300x41 + 1400x42 + 1500x43 + 1050x44 \\
\text{f.h. } & x11 + x21 + x31 + x41 \geq 500 \\
& x12 + x22 + x32 + x42 \geq 400 \\
& x13 + x23 + x33 + x43 \geq 300 \\
& x14 + x24 + x34 + x44 \geq 400 \\
& x11 + x12 + x13 + x14 \leq 1600y1 \\
& x21 + x22 + x23 + x24 \leq 1600y2 \\
& x31 + x32 + x33 + x34 \leq 1600y3 \\
& x41 + x42 + x43 + x44 \leq 1600y4
\end{aligned}
$$

minden yi = 0 vagy 1; minden xij ≥ 0 egész

Megj.: egyetlen városból sem indul 1600-nál több utazás, a jobboldal ezért az 1600yi.