13. FEJEZET

13.1 Alfejezet

1.

			Sor Min
	2	2	2
	1	3	1
Oszlop Max	2	3	

Mivel max (sor min) = min (oszlop max) = 2, az a stratégiapár, amelyben a sorjátékos az első sort, az oszlopjátékos pedig az első oszlopot választja, nyeregpontot ad. A játék értéke: 2 egység (a sorjátékos számára).

2.

					Sor Min
	4	5	5	8	4
	6	7	6	9	6
	5	7	5	4	4
	6	6	5	5	5
Oszlop Max	6	7	6	9	

Mivel max (sor min) = min (oszlop max) = 6, azok a stratégiapárok, amelyekben a sorjátékos a második sort, az oszlopjátékos az első vagy a harmadik sort választja, nyeregpontokat adnak. A játék értéke 6 egység (a sorjátékos számára).

3. Mivel Wicked Witch maximalizálni akarja a Mad Max által megtett út hosszát, Wicked Witchnek osztjuk a sorjátékos szerepét, Mad Max pedig az oszlopjátékos lesz. A kifizetőmátrix az alábbi:

	Mad Max	Úticélja	Sor Min
Wicked Witch által szabadon hagyott utak	Atlanta	Nashville	
Atl-St.L és Nash.-St. L.	1600	1800	1600
Atl.-NO és Nash.-St. L	1700	1800	1700
Atl.-St. L és Nash.-NO	1600	1400	1400
Atl.-NO és Nash.-NO	1700	1400	1400
Oszlop Maximum	1700	1800	

Mivel max(sor min) = min(oszlop max) = 1700, ezért az a stratégiapár, amelyben Mad Max Atlantába megy és Wicked Witch az

Atlanta-New Orleans és a Nashville-St. Louis utakat szabadon hagyja (vagyis elzárja az Atlanta-St. Louis és a Nashville-New Orleans utakat), nyeregpont. Mad Max összesen 1700 mérföldet tesz meg (ez a játék értéke).

4. Mivel a nyeregpont sorminimum, ezért sorában a legkisebb szám, és mivel oszlopmaximum, ezért oszlopában a legnagyobb szám. Tegyük most fel, hogy a_{ij} a legkisebb szám az i-edik sorban és a legnagyobb szám a j-edik oszlopban. Megmutatjuk, hogy az a stratégiapár, amelyben a sorjátékos az i-edik stratégiát, az oszlopjátékos pedig a j-edik stratégiát (röviden (i,j))választja, nyeregpont. Először bebizonyítjuk, hogy

(1) max (sor minimum)≤min(oszlop maximum).

Tegyük fel, hogy a_{ij} = az i-edik sor legkisebb eleme. Ekkor minden k-ra $a_{ij} \le a_{ik}$. Tehát $a_{ij} \le \max_k a_{ik}$.
Így minden k-ra

(i-edik sor minimuma) = a_{ij} ≤ (k-adik oszlop maximuma).

Ezért minden k-ra

max (sor minimum)≤(k-adik oszlop maximuma)

és

max (sor minimum)≤min (oszlop maximum.

Most tegyük fel, hogy a_{ij} a legkisebb elem az i-edik sorban és a legnagyobb a j-edik oszlopban. Megmutatjuk, hogy az (i,j) stratégiapár nyeregpont. Nyilvánvalóan

(2) max (sor min)≥a_{ij} és
(3) min (oszlop maximum)≤a_{ij}.

Az (1),(2)és(3) egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy

a_{ij}≤ max(sor minimum)≤min(oszlop maximum)≤a_{ij},

amiből az következik, hogy

a_{ij} = max (sor minimum) = min (oszlop maximum),

ami azt jelenti, hogy az (i,j) stratégiapár a mátrixjáték nyeregpontja.

13.2 Alfejezet

1. Mivel a harmadik oszlopot mind az első, mind a második oszlop dominálja, ezért csak a következő mátrixjátékot kell megoldani:

1	2
2	0

Ennek a játéknak nincs a tiszta stratégiák halmazán nyeregpontja. Legyen x_1 = annak a valószínűsége, hogy a sorjátékos az első sort választja és y_1 = annak a valószínűsége, hogy az oszlopjátékos az első oszlopot választja.

A sorjátékos úgy szeretné x_1-et megválasztani, hogy maximalizálja a $\min(x_1 + 2(1 - x_1), 2x_1) = \min(2 - x_1, 2x_1)$ függvényt. A maximum ott van, ahol az $y = 2 - x_1$ és az $y = 2x_1$ egyenesek metszik egymást, vagyis az $x_1 = 2/3$ értéknél. A játék értéke (a sorjátékos szempontjából) $2 - (2/3) = 4/3$.

Az oszlopjátékos olyan y_1-et keres, amely minimalizálja a $\max(y_1 + 2(1 - y_1), 2y_1) = \max(2 - y_1, 2y_1)$függvényt. A minimum ott van, ahol a $2 - y_1 = 2y_1$ és az $y_1 = 2/3$ egyenesek metszik egymást.

Igy a sorjátékos optimális stratégiája (2/3, 1/3) és az oszlopjátékosé pedig a (2/3, 1/3, 0)stratégia.

2. A kifizető mátrix az 1.játékos szempontjából a következő:

	2.játékos	
	Tipp az 1. játékos állításáról	
1.játékos	Igaz	Hamis
Igazat mond	-1	5
Hazudik	5	-10

A mátrixnak nincs nyeregpontja. Legyen T = annak a valószínűsége, hogy az 1.játékos igazat mond és GT = annak a valószínűsége, hogy a 2.játékos azt tippeli, hogy az 1.játékos az igazat mondja. Ekkor az 1.játékosnak úgy kell a T értékét megválasztania, hogy maximalizálja a

$$\min(-T + 5(1 - T), 5T - 10(1 - T)) = \min(5 - 6T, 15T - 10)$$

függvényt. Ehhez az kell, hogy $5 - 6T = 15T - 10$ vagyis $T = 15/21$ legyen. Ekkor a játék értéke az 1.játékosnak $5 - 6(15/21) = 15/21$.

A 2.játékos úgy választja meg a GT értékét, hogy minimalizálja a $\max(-6GT + 5, 15GT - 10)$ függvényt, amely a minimumát a $GT = 15/21$ értéknél veszi fel. Igy mindkét játékos optimális (kevert) stratégiája (15/21, 6/21) és a játék értéke az 1.játékos számára 15/21.

3.Az első oszlopot dominálja a második, ezért elég csak a következő mátrixjátékkal foglalkozni:

1	3
3	2

Legyen x_1 = annak a valószínűsége, hogy a sorjátékos az első sort választja és y_2 = annak a valószínűsége, hogy az oszlopjátékos a második oszlopot (az eredeti mátrixban) választja. A sorjátékos úgy választja meg x_2 értékét, hogy maximalizálja a

$$\min(x_1 + 3(1 - x_1), 3x_1 + 2(1 - x_1))=\min (3 - 2x_1, 2 + x_1)$$

függvényt. Ez azt jelenti, hogy $3 - 2x_1 = 2 + x_1$ vagyis $x_1 = 1/3$. A játék értéke a sorjátékosnak $2 + 1/3 = 7/3$. Az oszlopjátékos minimalizálni akarja a

$$\max(y_2 + 3(1 - y_2), 3y_2 + 2(1 - y_2)) = \max (3 - 2y_2, y_2 + 2)$$

függvényt. A minimumpontot úgy kapjuk meg, hogy megoldjuk a

$$3 - 2y_2 = y_2 + 2$$

egyenletet, amelynek a megoldása $y_2 = 1/3$. Így a sorjátékos optimális stratégiája: (1/3, 2/3) az oszlopjátékosé pedig: (0, 1/3, 2/3). A játék értéke a sorjátékos számára: 7/3.

4.

Sorjátékos választása	Oszlopjátékos választása	Sorjátékos nyeresége
$x_1<1/3$	3. oszlop	<7/3
$x_1>1/3$	2. oszlop	<7/3

5.

Oszlopjátékos választása	Sorjátékos választása	Oszlopjátékos vesztesége
$y_2<1/3$	1. sor	>7/3
$y_2>1/3$	2. sor	>7/3

6. Ez egy konstans-összegű játék, amelyet úgy kell megoldanunk, mintha egy zérus-összegű játék volna, ahol a sorjátékos az 1.Vállalat, az oszlopjátékos a 2.Vállalat, a kifizető matrix pedig a következő:

	Alacsony	Magas
Alacsony	500	400
Magas	300	600

Láthatjuk, hogy a mátrixnak nincs nyeregpontja. Legyen tehát L= annak a valószínűsége, hogy az 1.Vállalat termelése alacsony szintű. Ha a 2. Vállalat termelése alacsony szintű, akkor az 1. Vállalat várható nyeresége = 500L + 300(1 - L) = 200L + 300. Ha a 2.Vállalat termelése magas, akkor az 1. Vállalat várható nyeresége = 400L + 600(1 - L) = 600 - 200L. A játékelmélet alapvető feltételezése a játékosok racionalitása, így az 1.Vállalat várható nyeresége: min[600 - 200L, 200L + 300]. Ezt a kifejezést kell

maximalizálni, a maximumban 600 - 200L = 200L + 300 vagyis L = 3/4. A játék értéke az 1.Vállalat számára tehát = $450.
Legyen L' = annak a valószínűsűsége, hogy a 2.Vállalat alacsony szintű termelést választ. Ekkor a 2.Vállalat minimalizálni igyekszik az 1.Vállalat nyereségét. Ha az 1.Vállalat alacsony szintet választ, akkor az 1.Vállalat várható nyeresége: 500L' + 400(1 - L') = 400 +100L'. Az 1.Vállalat "Magas" választása esetén az 1.Vállalat várható nyeresége: 300L' + 600(1 - L') = 600 - 300L'. Mivel az 1.Vállalatot is racionálisnak (saját nyereségét maximalizálónak) tételezzük fel, a 2.Vállalatnak L' optimális választása esetén minimalizálni kell a

$$\max [100L' + 400, 600 - 300L']$$

függvényt. Ennek minimuma az L' = 0.5 értéknél van. Így az 1.Vállalatnak alacsony termelési szintet kell választani az esetek 3/4 részében, míg a 2.Vállalatnak az esetek felében kell alacsony termelési szintet választani.

7. A sorjátékos Mo, az oszlopjátékos Bo, a kifizetőmátrix a következő:

	Negyed dollar	Egy cent
Negyed dollar	25	-25
Egy cent	-1	1

Legyen x_i = annak a valószínűsége, hogy Mo az i-edik sort, y_i = annak a valószínűsége, hogy Bo az i-edik oszlopot választja. Bo egyes oszlopválasztásai ellen Mo várható nyereségei: 1. oszlop ellen: $25x_1-(1-x_1) = 26x_1-1$, 2.oszlop ellen: $-25x_1+(1-x_1)= 1-26x_1$.
Mo-nak olyan x_1-et kell választania, amely maximalizálja a $\min\{26x_1-1,1-26x_1\}$ függvényt. Maximumban $26x_1 - 1 = 1 - 26x_1$. Ebből $x_1 = 1/26$.
Bo várható veszteségei Mo egyes sorválasztásai esetén:
1.sor ellen: $25y_1 - 25(1-y_1) = 50y_1 - 25$
2.sor ellen: $-y_1 + (1-y_1) = 1 - 2y_1$.
Bo-nak olyan y_1-et kell választani, amely minimalizálja a $\max\{50y_1 -25, 1 - 2y_1\}$ függvényt. A minimumban $50y_1-25=1-2y_1$ amiből $y_1 = 1/2$. A játék értéke mindkét játékos számára 0.

8. Jelentse IJ azt, hogy az I játékos játssza az első egyest, J pedig a másodikat. Ekkor az Egyetem csapatának a kifizetőmátrixa a következő (Sorjátékos az Egyetem, oszlopjátékos a Főiskola):

	XY	XZ	YZ	YZ	ZX	ZY
AB	1	1	0	1/2	1	3/2
BA	0	1	1	3/2	1	1/2

A Főiskola számára minden olyan stratégia, amelyben a Z játékos szerepel dominált és így elhagyható (0 valószínűséggel játsszák).

Így a következő játékot kell megoldani:

	XY	YX
AB	1	0
BA	0	1

Ez az ismert Páros-Páratlan játék (1 egységet hozzáadtunk minden egyes kifizetéshez, ami az optimális stratégiákat nem befolyásolja), amelynek a megoldása az, hogy mindkét játékos 1/2 valószínűséggel játssza mindkét stratégiáját és a játék értéke ½.

9. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a a kifizető mátrix legnagyobb eleme. Legyen x_i =annak a valószínűsége, hogy a sorjátékos az i-edik sort választja és y_i = annak a valószínűsége, hogy az oszlopjátékos az i-edik oszlopot választja.

Az oszlopjátékos választásai ellen a sorjátékos várható nyereségei:
1. oszlop: $ax_1 + c(1-x_1)$
2. oszlop: $bx_1 + d(1-x_1)$.
Igy a sorjátékosnak maximalizálnia kell a

$$\min\{(a-c)x_1+c,(b-d)x_1+d\}$$

függvényt. A maximumban $(a-c)x_1+c = (b-d)x_1+d$ vagyis $x_1=(d-c)/(a+d-b-c)$.

A sorjátékos választásai ellen az oszlopjátékos várható veszteségei:
1.sor: $ay_1+b(1-y_1)$
2.sor: $cy_1+d(1-y_1)$
Igy az oszlopjátékosnak minimalizálnia kell a

$$\max\{ay_1+b(1-y_1),cy_1+d(1-y_1)\}$$

függvényt. A minimumban $ay_1+b(1-y_1) = cy_1+d(1-y_1)$ vagyis $y_1 = (d-b)/(a+d-b-c)$. Könnyű látni, hogy $d-c>0, d-b>0$ és $a+d-b-c>0$ teljesülnek, ha a kifizető mátrixnak nincs nyeregpontja és $d\geq\max\{b,c\}$, ezáltal x_1 és y_1 valóban valószínűségek.

10a. A támadóknak az esetek (0-10)/(1+0-8-10) = 10/17 részében a futást kell választani.

10b. A 9. feladat megoldása szerint az optimális stratégiában a dobás valószínűsége = $(a-b)/(a+d-b-c)$. Azt akarjuk megmutatni, hogy c növelésével a Támadás kisebb gyakorisággal fog dobni. A dobás valószínűségének a c szerinti parciális deriváltja = $(a-b)(a+d-b-c)^{-2}<0$, és ez azt jelenti, hogy c növelésével kevésbé gyakran kell a "Dobás" stratégiát használni. Ennek az az oka, hogy a dobás futás elleni hatékonyságának növekedésére a Védelem azzal reagál, hogy gyakrabban használja a "Dobás" stratégiát és ezzel arra kényszeríti a Támadást, hogy ritkábban dobjon.

11. A 6.oszlopot a 3.oszlop dominálja, így azt elhagyhatjuk. A maradék mátrixban a 4.sor dominálja a 3.sort (Az oszlop elhagyása előtt ez nem állt fenn!). Folytassuk a következőképpen:

5.sor domonálja a 2.sort,
4.oszlop dominálja a 2.oszlopot,
3.oszlop dominálja az 5.oszlopot,
4.sor dominálja az 1.sort,
3.oszlop dominálja az 1.oszlopot,
3.oszlop dominálja a 4.oszlopot,
A maradék mátrixból egyértelmű, hogy az oszlopjátékosnak a 3.oszlopot, a sorjátékosnak pedig a 4.sort kell játszani. Ez nyeregpont és a játék értéke -1.

13.3 Alfejezet

1a. Legyen a sorjátékos a Lövész, az oszlopjátékos pedig a Katona. Ekkor a Lövész kifizetőmátrixa a következő:

	1	2	3	4	5
A	1	1	0	0	0
B	0	1	1	0	0
C	0	0	1	1	0
D	0	0	0	1	1

1b. A 2.oszlopot az 1.oszlop dominálja, a 4.oszlopot pedig az 5.oszlop, így a 2. és 4.oszlopokat elhagyjuk.

1c. Elemi számolással kapjuk, hogy a játék értéke 1/3 a Lövész számára.

1d. Ha a Katona a megadott nem-optimális stratégiát választja, akkor a Lövész mindig A-ra lő és így ½ valószínűséggel talál, ez pedig több, mint 1/3, ami a játék értéke.

1e.

A Lövész LP-je
max v

f.h. $v \le x_1$
$v \le x_1 + x_2$
$v \le x_2 + x_3$
$v \le x_4$, $v \le x_3 + x_4$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

A Katona LP-je
min w

f.h. $w \ge y_1 + y_2$
$w \ge y_2 + y_3$
$w \ge y_3 + y_4$
$w \ge y_4 + y_5$
$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1$
$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0$

A Katona számára $y_1 = y_3 = y_5 = w = 1/3$ lehetséges megoldás. A Lövész számára $x_1 = x_3 = x_4 = v = 1/3$ szintén lehetséges megoldás. Mivel erre a két megoldásra $v = w$, így mindkettő optimális stratégia.

2. A 3.sort dominálja az 1.sor és a 2.sor is, a 4.oszlopot pedig dominálja az 1.oszlop, így számolhatunk a következő kifizető mátrixszal:

4	5	1
2	1	6

Ekkor

A sorjátékos LP-je
max v
f.h. $v \le 4x_1 + 2x_2$
$v \le 5x_1 + x_2$
$v \le x_1 + 6x_2$
$x_1 + x_2 = 1$
$x_1, x_2 \ge 0$

Az oszlopjátékos LP-je
min w
f.h. $w \ge 4y_1 + 5y_2 + y_3$
$w \ge 2y_1 + y_2 + 6y_3$
$y_1 + y_2 + y_3 = 1$
$y_1, y_2, y_3 \ge 0$

Az $x_2 = 1 - x_1$ és az $y_3 = 1 - y_1 - y_2$ helyettesítésekkel azt kapjuk, hogy

A sorjátékos LP-je
max v
f.h. (1) $v \le 2 + 2x_1$
(2) $v \le 1 + 4x_1$
(3) $v \le 6 - 5x_1$
(4) $x_1 \le 1$

Minden változó ≥ 0

Az oszlopjátékos LP-je
min w
f.h. (5) $w \ge 1 + 3y_1 + 4y_2$
(6) $w \ge 6 - 4y_1 - 5y_2$
(7) $1 - y_1 - y_2 \ge 0$

Minden változó ≥ 0

A sorjátékos LP-jének optimális megoldása: $x_1 = 4/7$, $x_2 = 3/7$, $x_3 = 0$, $v=22/7$
Az oszlopjátékos LP-jének optimális megoldása: $y_1 = 5/7$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2/7$, $y_4 = 0$, $w=22/7$.
A játék értéke a sorjátékos számára= 22/7.

3. Mivel az 1.oszlop dominálja a 3.oszlopot, elég a következő mátrixjátékkal foglalkozni:

2	4
3	1

A sorjátékos LP-je:
max v
f.h. (1) $v \le 2x_1 + 3(1 - x_1) = 3 - x_1$
(2) $v \le 4x_1 + 1 - x_1 = 3x_1 + 1$
(3) $x_1 \le 1$

Minden változó ≥ 0

Az oszlopjátékos LP-je:
min w
f.h. (4) $w \ge 2y_1 + 4(1 - y_1) = 4 - 2y_1$
(5) $w \ge 3y_1 + y_2 = 3y_1 + 1 - y_1 = 2y_1 + 1$
(6) $y_1 \le 1$

Minden változó ≥0

A sorjátékos optimális stratégiája: $x_1 = x_2 = ½$, és v=5/2.
Az oszlopjátékos optimális stratégiája: $y_1 = 3/4$, $y_2 = 1/4$, $y_3 = 0$, és w=5/2
A játék értéke: 5/2

4. Jelölje (i,j) azt a stratégiát, amely szerint egy játékos i ezredet küld az 1.városhoz és j ezredet a 2.városhoz. Legyen Custard a sorjátékos és Peabody az oszlopjátékos. Ekkor a kifizető mátrix:

	(3,0)	(0,3)	(2,1)	(1,2)
(4,0)	4	0	2	1
(0,4)	0	4	1	2
(3,1)	1	-1	3	0
(1,3)	-1	1	0	3
(2,2)	-2	-2	2	2

Legyen x_i = annak a valószínűsége, hogy Custard tábornok az i-edik stratégiáját alkalmazza és y_j = annak a valószínűsége, hogy Peabody tábornok a j-edik stratégiáját alkalmazza. Mivel a két város között nincs különbség, azt sejtjük, hogy $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, $y_1 = y_2$, és $y_3 = y_4$ az egyes játékosok optimális stratégiájában. Ezért vezessük be a következő jelölést:
$x_1 = x_2 = a$, $x_3 = x_4 = b$ $x_5 = c$, $y_1 = y_2 = d$, $y_3 = y_4 = e$.
Ekkor $2a + 2b + c = 1$ and $2d + 2e = 1$ és
Custard LP-je:
max v
f.h. $v \le 4a - 2(1 - 2a - 2b) = 8a + 4b - 2$
$v \le 4a - 2(1 - 2a - 2b) = 8a + 4b - 2$
$v \le 3a + 3b + 2(1 - 2a - 2b) = -a - b + 2$
$v \le 3a + 3b + 2(1 - 2a - 2b) = -a - b + 2$
$1-2a-2b \ge 0$
$a,b \ge 0$

Peabody LP-je:
min w
f.h. $w \ge 4d + 3(1/2 - d) = 3/2 + d$
$w \ge 4d + 3(1/2 - d) = 3/2 + d$
$w \ge 3(1/2 - d) = 3/2 - 3d$
$w \ge 3(1/2 - d) = 3/2 - 3d$
$w \ge -4d + 4(1/2 - d) = 2 - 8d$
$d \le 1/2$
$d \ge 0$
Custard optimális stratégiája: $x_1 = x_2 = 4/9$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1/9$, v=14/9.
Peabody optimális stratégiája: $y_1 = y_2 = 1/18$, $y_3 = y_4 = 4/9$, w=14/9.
A játék értéke: 14/9.

Figyeljük meg, hogy az erősebb játékos (Custard) többet kockáztat, amennyiben legtöbbször minden erejét ugyanahhoz a városhoz küldi míg a gyengébb játékos többnyire megosztja erőit a két város között.

5a. Ha $A = -A^T$, akkor valójában a játékosok azonosak. Tegyük ugyanis fel, hogy a sorjátékos az i-edik sort választja és az oszlopjátékos pedig a j-edik oszlopot. Ekkor a sorjátékos nyeresége a_{ij} és az oszlopjátékos veszít a_{ij}-t. Most tegyük fel, hogy a sorjátékos a j-edik sort választja és az oszlopjátékos az i-edik oszlopot.Ha a játékosok azonosak, akkor a sorjátékosnak a_{ij}-t kellene veszíteni és ugyanennyit nyerni az oszlopjátékosnak. Valójában ez is történik, a sorjátékos nyeresége $a_{ji} = -a_{ij}$, és így a sorjátékos vesztesége a_{ij}, az oszlopjátékos nyeresége pedig a_{ij}.

5b. A sorjátékos LP-je:

max v

f.h $v \le a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n$

.

.

.

$v \le a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

$x_i \ge 0$, minden i-re

Az oszlopjátékos LP-je:

min w

f.h. $w \ge a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n$

(vagyis $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{n1}y_n \ge -w$)

.

.

.

$w \ge a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n$

(vagyis $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \ge -w$)

$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$

$y_j \ge 0$, minden j-re

Vegyük észre, hogy ha $v^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ lehetséges megoldása a sorjátékos LP-jének, akkor $-v^*, x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*$ lehetséges megoldása az oszlopjátékos LP-jének. Tegyük fel, hogy $v^*>0$, és $(v^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ a sorjátékos LP-jének optimális megoldása. Ekkor $(-v^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ lehetséges megoldása ezen feladat duáljának,ami nem más, mint az oszlopjátékos LP-je. Ez viszont azt jelenti, hogy az oszlopjátékos biztosítani tudja, hogy vesztesége ne legyen több mint $-v^*<0$. Ez ellentmod annak, hogy $v^*>0$ a játék értéke.
Ugyanígy lehet belátni, hogy $v^*<0$ sem lehet.

5c. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ a sorjátékos optimális stratégiája. Mivel a játék értéke 0, v=w=0 és így az állítás igazságáról a sor- és oszlopjátékosok LP-jébe való egyszerű behelyettesítéssel (mind az x_i, mind az y_j változók helyébe az $\mathbf{x}^*$ megfelelő komponenseit helyettesítjük) győződhetünk meg.

5d. A Páratlan és Páros, a Kő-Papír-Olló és a Két Ujjas Snóbli játékok mindegyike szimmetrikus. Ebből következik, hogy $v = 0$, és hogy a sor- és oszlopjátékosok optimális stratégiái megegyeznek. Ez mind a grafikus megoldást, mind a lineáris programozással való megoldást megkönnyíti. Erről meggyőződhetünk, ha ezeket a játékokat ismét megoldjuk, most már a fentiek ismeretében.

6. Legyen v^* a játék értéke a sorjátékos számára. Az oszlopjátékos LP-jének feltételeiből következik, hogy a sorjátékos minden sorválasztása esetén az oszlopjátékos várható vesztesége nem lehet több, mint v^*. Így a sorjátékos egyetlen kevert stratégiája sem adhat nagyobb várható nyereséget v^*-nél. Mivel a sorjátékos optimális stratégiája legalább v^* várható nyereséget ad, ezért a sorjátékos nem tud hasznot húzni stratégiája megváltoztatásából, ha az oszlopjátékos az optimális stratégiáját játssza.

7. Ha a sorjátékos LP-jének i-edik feltétele szigorú egyenlőtlenségként teljesül, akkor a komplementaritási tétel szerint az oszlopjátékos optimális stratégiáját követve soha nem fogja pozitív valószínűséggel választani az i-edik oszlopot (tiszta stratégiát). Ez érthető és ésszerű, hiszen az i-edik feltétel szigorú egyenlőtlenségként való teljesülése azt jelenti, hogy a sorjátékos többet kapna, mint a játék értéke, ha az oszlopjátékos az i-edik stratégiáját játssza és ezért az oszlopjátékosnak ezt nem szabad tennie. A két játékos szerepének felcserélésével hasonlóan lehet magyarázni a másik komplementaritási összefüggést is.

8. min w

f.h
$$
\begin{aligned}
a + 4000b - 9000 &= e_1' - e_1'' \\
a + 6000b - 12000 &= e_2' - e_2'' \\
a + 7000b - 14000 &= e_3' - e_3'' \\
a + 1000b - 5000 &= e_4' - e_4'' \\
a + 3000b - 8000 &= e_5' - e_5'' \\
w &\geq e_1' + e_1'' \\
w &\geq e_2' + e_2'' \\
w &\geq e_3' + e_3'' \\
w &\geq e_4' + e_4'' \\
w &\geq e_5' + e_5''
\end{aligned}
$$

Minden változó ≥ 0

Vegyük észre, hogy $e_i' + e_i''$ az i-edik napra vonatkozó becslés abszolut hibája. Az a és b optimális értékei minimalizálják az abszolut hibát.

9. Legyen v^* = az A játék értéke, $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ = sorjátékos optimális stratégiája az A játékban, $(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ = oszlopjátékos optimális stratégiája az A játékban. Egyszerű behelyettesítéssel láthatjuk, hogy $v^* + c$ és $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ a sorjátékos LP-jének lehetséges megoldása az A′ játékban.
Ugyancsak könnyű igazolni behelyettesítéssel, hogy $v^* + c$ és $(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ lehetséges megoldása az oszlopjátékos LP-jének az A' játékban. Mivel a két LP célfüggvényértéke ezekkel a stratégiákkal egyenlő (vagyis $v^* + c$), az A′ játék értéke $v^* + c$ és az A játék optimális stratégiái az A′ optimális stategiái is.

13.4 alfejezet

1. (9, -1) egyensúlypont, mivel ha bármelyik játékos is megváltoztatja a stratégiáját (miközben a másik nem), kifizetése nem nő.

2. (-1, 1) egyensúlypont, mivel ha bármelyik játékos is megváltoztatja a stratégiáját (miközben a másik nem), kifizetése nem nő.

3. A kifizetéseket milliókban számoljuk.Feltesszük, hogy mindkét városrész támogatja a saját határozati javaslatát (ez egyébként dominálja azt a stratégiát, amikor még a saját javaslatát sem támogatja). A sorjátékos legyen Manhattan, az oszlopjátékos Brooklyn, a kifizetéseket pedig az alábbi táblázatban látjuk:

	Támogat	Ellenez
Támogat	(8,8)	(-1,9)
Ellenez	(9,-1)	(0,0)

Ez egy fogoly dilemma, amelynek (0,0) az egyensúlypontja. “Ellenez” a nemkooperatív cselekvés, “Támogat” a kooperatív.

4. Ha a sorjátékos az (1/2, 1/2) kevert stratégiát választja az oszlopjátékos pedig az (1/2, 1/2) stratégiát, akkor a sorjátékos várható nyeresége 0. Tegyük fel, hogy az oszlopjátékos az (1/2, 1/2) stratégiát választja a sorjátékos pedig eltér az (1/2, 1/2) stratégiától és az $(x_1, 1 - x_1)$ stratégiát játssza. Ekkor a sorjátékos várható nyeresége: $x_1(1/2)(2) + (1 - x_1)(1/2)(-2) + x_1(1/2)(-2) + (1-x_1)(1/2)(2) = 0$. Igy a sorjátékosnak nem származik előnye abból, ha az (1/2, 1/2) stratégiát megváltoztatja. Ugyaígy lehet megmutatni, hogy az oszlopjátékosnak sem érdeke egyoldalúan stratégiát változtatni.

5a. Legyen a sorjátékos Japán, az oszlopjátékos a USA. A kifizetések a következő táblázatban láthatók:

	Fejleszt	Nem fejleszt
Fejleszt	(-10, -10)	(100, 0)
Nem fejleszt	(0, 100)	(0, 0)

(Fejleszt, Nem fejleszt) és (Nem fejleszt, Fejleszt) egyensúlypontok.

5b. Ebben az esetben a kifzetéseket az alábbi táblázat mutatja:

	Fejleszt	Nem fejleszt
Fejleszt	(5, -10)	(100, 0)
Nem fejleszt	(0, 100)	(0, 0)

Most a (Fejleszt, Nem fejleszt) az egyetlen egyensúlypont. Ez azt jelenti, hogy az állami támogatás eredményeként Japán uralni fogja a piacot és növekszik exportja.

Áttekintő feladatok

1. Ez egy konstans-összegű játék a következő kifizetőmátrixszal a sorjátékos (1.kereskedelmi lánc) szempontjából (az oszlopjátékos a 2.lánc és a kifizetése 52-az 1.lánc kifizetése):

	A	B	C	Sor Min
A	26	20	30	20
B	32	26	40	26
C	22	12	26	12
Oszlop Max	32	26	40	

Látszik, hogy az egyensúlypont (a matrix nyeregpontja), ha mindkét lánc a B pontba települ és egyenlően osztozik a vásárlókon.

2. Feltesszük, hogy az a vásárló aki nem megy a Ruby-hoz, az a Swamp-hoz fog menni vásárolni. Ezért ez egy konstansösszegű játék, ami lényegében egy zérus-összegű játék. Legyen x_1 = annak a valószínűsége, hogy Ruby az üdítőt választja és y_1 = annak a valószínűsége, hogy Swamp a vajat választja. Ekkor Ruby olyan x_1-et akar választani, amely maximalizálja a
$\min(40{,}000x_1 + 60{,}000(1 - x_1),\ 50{,}000x_1 + 30000(1 - x_1))$
$= \min(60{,}000 - 20{,}000x_1,\ 30{,}000 + 20{,}000x_1)$ függvényt.
A maximum az $x_1 = ¾$ értéknél van. A játék értéke = 45,000 Ruby szempontjából.
Swamp olyan y_1-et akar meghatározni, amely minimalizálja a
$\max(40{,}000y_1 + 50{,}000(1 - y_1),\ 60{,}000y_1 + 30{,}000(1 - y_1))$
$= \max(50{,}000 - 10{,}000y_1,\ 30{,}000 + 30{,}000y_1)$ függvényt.
A minimum az $y_1 = ½$ értéknél van.
Így Ruby az esetek 3/4 részében üdítöt, 1/4 részében pedig a tejet választja. Swamp az esetek felében vajat, felében pedig narancslét választ. Ha mindkét fél az optimális stratégiákat alkalmazza, akkor a két szupermarket egyenlően osztozik a vásárlóközönségen.

3. Először adjunk hozzá 1-et a kifizetőmátrix minden eleméhez. Ezzel tudjuk biztosítani, hogy a két LP-ben minden változó nemnegatív lesz. Így a következő kifizető mátrixszal dolgozunk:

3/2	0	0
0	3/2	0
0	0	2

Sorjátékos LP-je
max v
f.h. $v \le 3x_1/2$
$v \le 3x_2/2$
$v \le 2(1 - x_1 - x_2)$

Oszlopjátékos LP-je
min w
f.h. $w \ge 3y_1/2$
$w \ge 3y_2/2$
$w \ge 2 - 2y_1 - 2y_2$

$1 - x_1 - x_2 \geq 0$ $1 - y_1 - y_2 \geq 0$

Minden változó ≥ 0 Minden változó ≥ 0

A két LP-t megoldva azt kapjuk, hogy mindkét játékos optmális stratégiája (4/11, 4/11, 3/11), a játék értéke pedig 6/11, ami azt jelenti, hogy az eredeti játék értéke: 6/11-1= -5/11.
Ha a sorjátékos az (1, 0, 0) stratégiát játssza, akkor az oszlopjátékos (1/2,1/2,0) stratégia választása mellett a sorjátékos várható nyeresége: 1/2(1/2) + 1/2(-1) = -1/4. Ez több mint a játék értéke, ami -5/11.

4. Mivel max (sor min) = min (oszlop max) = 4, látjuk, hogy a játék értéke a sorjátékos számára 4. Az a stratégiapáros, amelyben a sorjátékos a második sort, az oszlopjátékos pedig a második oszlopot választja a játék nyeregpontja.

5. Legyen a sorjátékos az Airway, az oszlopjátékos pedig a Corvett. A kifizetések a következő táblázatban láthatók:

	Terjeszkedik	Nem terjeszkedik
Terjeszkedik	(1,0.5)	(5,-2)
Nem terjeszkedik	(-1,4)	(3,2)

Az egyetlen egyensúlypont: az Airway és a Corvett is terjeszkedik