15. fejezet megoldásai

15.2. alfejezet megoldásai

1a. q = 6

1b. Mivel E(1) - E(0) < 0, E(2) - E(1) < 0, de E(3) - E(2) > 0, a határelemzés szerint q = 2 az optimális.

1c. Mert itt E(q) nem konvex függvénye q -nak. Így q = 2 –ről csak azt tudjuk, hogy lokális minimum, nem feltétlenül minimalizálja E(q)-t az összes lehetséges q közül.

15.3. alfejezet megoldásai

1. d≤q esetén az összköltség, TC, azaz c(d, q) = 10,000q - 15,000d - 9000(q - d) = 1,000q - 6000d

d≥q + 1 esetén az összköltség, TC, azaz c(d, q) = 10,000q - 15,000d + 12,000(d - q) = -2000q - 3000d

Vagyis c_0=1,000 és c_u=2,000. Az optimális rendelési mennyiség (q*) az a legkisebb q, amelyre még teljesül

$$P(\mathbf{D}\le q^*)\ge \frac{2000}{3000} = \frac{2}{3} = .667$$

Mivel P(**D**≤30)=.60 és P(**D**≤35)=.80, 35 autót kell rendelni augusztusban.

2. d≤q esetén az összköltség, TC, azaz c(d, q) = 15q - 30d.

d≥q + 1 esetén az összköltség, TC, azaz c(d, q) = 15q - 30q = -15q.

Így c_0=15 és c_u=15. Az optimális rendelési mennyiség (q*) az a legkisebb q, amelyre még teljesül

$$P(\mathbf{D}\le q^*)\ge \frac{15}{15 + 15} =.50$$

Mivel P(**D**≤70) = .45 és P(**D**≤90) =.70, 90 újságot kell rendelnie.

3. c_0 növekedése csökkenti $c_u/(c_0+c_u)$ -t. Erre a kisebb valószínűségre kell csak felérnie a kumulált valószínűségnek, ez már kisebb q –nál is bekövetkezhet, vagyis q csökkenhet (vagy változatlan marad). Máshogyan: a legkisebb q, amire P(**D**≤q) ≥ $c_u/(c_0 + c_u)$, kisebb lehet, így q* csökkenhet.

4. c_u növekedése növeli $c_u/(c_0+c_u)$ -t. Erre a nagyobb valószínűségre kell felérnie a kumulált valószínűségnek, ez lehet, hogy nagyobb q –t kíván, vagyis q növekedhet (vagy változatlan marad). Máshogyan: a legkisebb q, amire P(**D**≤q) ≥ $c_u/(c_0 + c_u)$, nagyobb lehet, így q* nőhet.

5a. d≤q esetén az összköltség, TC, azaz c(d, q) = 20q

d≥q+1 esetén az összköltség, TC, azaz c(d, q) = 20q + 30(d - q) = 30d - 10q

Így c_0 = 20 és c_u = 10. Az optimális rendelési mennyiség (q*) az a legkisebb q, amelyre még teljesül P(**D**≤q)≥ 10/(20 + 10) = .333

Mivel P(**D**≤50) = .2 és P(**D**≤60) = .35, 60 cellát kell rendelni.

5b. Elhanyagoltuk a maradványértékét a fel nem használt celláknak (ha lehet később is használni, vagyis nem romlik meg mindenképpen egy év alatt, akár használják, akár nem); elhanyagoltuk a maradványértékét a felhasznált celláknak (ha egy évnél hosszabban lehet használni). Hallgatott a feladat szövege arról, amit az előző feladatban kimondott, hogy "A maradék teljes egészében veszteség.", de egyéb adat hiányában kénytelenek voltunk ezt feltételezni itt. (A feleslegnek bizonyuló cellák haszonlehetőség költségére nem mondanám azt, hogy elhanyagoltuk, mert a teljes beszerzési költségüket figyelembe vettük, nem is csak ennek haszonlehetőség költség hányadát.)

6. $d \le q$ esetén $c(d,q) = 30q$ és $d \ge q$ esetén $c(d,q) = 30q + 54(d - q)$. Ebből $c_o = 30$ és $c_u = 24$. Az optimális rendelési mennyiség (q^*) az a legkisebb q, amelyre még teljesül $F(q^*) \ge 24/(24+30) = .444$. Innen $q^* = 450$.

7. q példányt nyomtatunk még. Így q+2000 az összkínálatunk.
$d \le q + 2000$ esetén $c(d,q) = - 35d + 15q -5(q + 2000 - d)$
$d > q + 2000$ esetén $c(d,q) = - 35(q + 2000) + 15q$
$c_o = 10$ és $c_u = 20$. Nyomtassuk a legkisebb q^* mennyiséget, amire már $F(q^*+2000) \ge 20/(20+10) = .67$. Nyomtassunk 5000 könyvet. Ekkor a várható nyereség 35{.3(5000) + .2(6000) + .5(7000)} - 15(5000) + 5{.3(2000)+ .2(1000)} = $146,000. Azért .5(7000), mert akár 7000, akár 8000 a kereslet, csak 7000 példányt tudunk eladni. Ha nem nyomtatunk könyvet, hanem csak a készletet adjuk el, akkor 2000(35) = $70,000 a nyereség. Inkább 5000 könyvet nyomtassunk. Ha 4000 könyv van még, az 2000-rel nagyobb készlet, tehát ha nyomtatunk egyáltalán, akkor ennyivel kevesebbet kell most nyomtatni (5000 - 2000 = 3000 könyvet), megtakarítva e 2000 könyv nyomtatási költségét, így a várható nyereség = 146,000 + 2000(15) = $176,000. Ha nem nyomtatnák könyvet, akkor a várható nyereség 35(4000) = $140,000 lenne, vagyis megérné nyomtatni. Ha nincs fix költsége is a nyomtatásnak, akkor bármekkora is a készlet, annyit éri meg nyomtatni, hogy a készlet és a nyomtatás együtt (legalább) 7000 példány legyen (ha már a készlet eléri a 7000 példányt, akkor nem éri meg nyomtatni).

8. Tegyük fel, hogy minden héten egyszer szülhetnek, közvetlenül az előadás után (ezt sugallja, hogy hetente 5%-ot felejtenek). (Ha közvetlenül az utolsó előadás után szülnek, még nem felejtenek (100%), egy héttel később (95%).)
q = ahányadik héten elkezdik a tanfolyamot és d = ahányadik héten szülnek. d-q+1 (de legfeljebb 5) előadáson vesznek részt. Az öt előadás 4 hét alatt történik meg (5 időpont közt 4 időszak van). A q+4. héten fejezik be a tanfolyamot ha közben nem szülnek.

$d < q$ esetén $c(d,q) = 0$ (el se kezdik)
$q \le d \le q+4$ esetén $c(d,q) = -20(d-q+1)$ (túlkészletezés ~ túl későn kezdik)
$q+4 < d$ esetén $c(d,q) = -\{100 - 5(d-(q+4))\}$ (alulkészletezés ~ túl korán kezdik)
$c_o = 20$ és $c_u = 5$. Azt a legkisebb q^* értéket keressük, melynél $F(q^*+4) \ge 5/(5+20) = .2$. Így a 37. héten fejezzék be, vagyis a 33. héten kezdjék a tanfolyamot.

9. Legyen
I = a bruttó jövedelem (a gyermekgondozási számlára befizetés és adózás előtt)

d = tényleges gyermekgondozási kiadás és
q = gyermekgondozási számlára az év elején befizetett összeg.
Egyszerűen elvész (az adózó számára) a számlára befizetett de ténylegesen el nem költött rész.
A gyermekgondozási számlára az év elején befizetett összeg (q), az esetleges év közbeni pótlás (d-q), továbbá az adó levonása után megmaradó elkölthető jövedelmet maximalizáljuk. (Hozzáadhatnánk még a (d) tényleges gyermekgondozási kiadást, mert az is hasznos, de ez az alternatíváktól független adottság, így nem változtat az alternatívák sorrendjén; (bár ugyanez állna –I –re is).)

$d \le q$ esetén $c(d,q) = -(I - q - .4(I - q))$

$d > q$ esetén $c(d,q) = -(I - d - .4(I - q) + .25(d-q))$.

$c_o = .6$ és $c_u = .15$. Úgy válassza q^* -ot, hogy $F(q^*) \ge .15/(.15+.6) = .2$ legyen. Tehát \$3000 –t fizessen gyermekgondozási számlára az év elején.

15.4. alfejezet megoldásai

1a. A valóságban bármely jegyet váltott utas egy adott, mondjuk 5% valószínűséggel nem jelenik meg beszálláskor. Ekkor a meg nem jelentek száma várhatóan .05q, tehát függ q -tól.

1b. Nem, mert az újságárus feladatban azt feltételezzük, hogy az f(d) sűrűségfüggvény adott, független q-tól.

2. Legyen d = amekkora hitelre ténylegesen szükség lesz; és q = a banktól felvett hitel. Tételezzük fel, hogy ha d>q, akkor a d-q különbözet egészét fel kell venni hitelként az uzsorástól.

$q \le 1{,}000{,}000$ kell legyen.

$d \le q \le 1{,}000{,}000$ esetén az összköltség = .10q

$d \ge q$ esetén az összköltség = .10q + .25(d-q) = .25d - .15q

Így $c_0 = .10$ és $c_u = .15$. A legkisebb q^* hitelt kell a banktól felvenni, amelyre teljesül

$$P(\mathbf{D} \le q^*) = \frac{.15}{.15 + .10} = .60$$

Ezt standardizálva azt kapjuk, hogy

$$P\left(\mathbf{Z} \le \frac{q^* - 700{,}000}{300{,}000}\right) = .60$$

Mivel $F(.25)=.60$, $$\frac{q^* - 700{,}000}{300{,}000} = .25$$

Tehát $q^*=\$775{,}000$.

3. $d \le q$ esetén a költség 10q - 25d

$d \ge q$ esetén a költség 10q - 25q.

$c_o = 10$ és $c_u = 15$. Azt a q^* mennyiséget rendelje, melynél

$$P(\mathbf{D} \le q^*) = .15/(.10 + .15) = .60 .$$

Standardizálva

$$P\left(\mathbf{Z} \le \frac{q^* - 100}{30}\right) = .60$$

Mivel F(.25) = .60, azt kapjuk, hogy $\frac{q^* - 100}{30} = .25$, tehát $q^* = 107.6$ fát rendeljen.

4a. d = keresett, q = rendelt hot dog mennyiség.
$d \le q$ esetén $c(d,q) = -1.5d + 1.2q - (q-d)$, innen $c_o = .2$
$d > q$ esetén $c(d,q) = -1.5q + 1.2q$, innen $c_u = .3$
$F(q^*) = .3/(.3+.2) = .6$. $P(D \le q^*) = 60$. Standardizálással $q^* = 40 + 10(.25) = 42.5$ hot dog.

4b. $P(D \le 52) = P(Z \le 1.2) = .885$

5. q = kapacitás (ezer tv-ben) d = éves kereslet (ezer tv-ben). Éves költség:
$d \le q$ esetén $c(d,q) = 100{,}000q - 250{,}000d$, $c_o = 100{,}000$
$d > q$ esetén $c(d,q) = 100{,}000q - 250{,}000q$, $c_u = 150{,}000$.
Azzal a q^* kapacitásszinttel kell rendelkeznie, amelynél
$P(D \le q^*) = 150{,}000/(100{,}000+250{,}000) = .6$. Standardizálva $q^* = 6000 + 2000(.25) = 6507$ (ezer tv).

6. Legyen **D** a naponta kielégítendő rendelések számának valószínűségi változója; **H** a naponta szükséges munkaórák számának valószínűségi változója.
d=a ténylegesen kielégítendő rendelések száma naponta
h=a ténylegesen szükséges munkaórák száma naponta
q=a ténylegesen szükséges alkalmazottak száma (q=h/8).
d és h valószínűségi változók megvalósult értékei.
$h \le 8q$ esetén az összköltség = 80q
$h \ge 8q$ esetén az összköltség = 80q + (h - 8q)15 .
Avagy
$(h/8) \le q$ esetén az összköltség = 80q
$(h/8) \ge q$ esetén az összköltség = -40q + 120(h/8)
Ez egy újságárus feladat, melyben a 'kereslet' a **H**/8 valószínűségi változó. $c_0=80$ és $c_u=40$. Mivel minden alkalmazott 50/8=6.25 rendelést dolgoz fel óránként, h=d/6.25, avagy q = h/8 = d/50. **H**/8=**D**/50. **H**/8 is normális eloszlású E(**H**/8) = 2000/50 = 40 várható értékkel és szórás(**H**/8) = 500/50 = 10.
Az alkalmazottak optimális száma (q^*) az, amelyre teljesül
$P(\mathbf{H}/8 \le q^*)=40/(80+40)=.333$
Standardizálva a **H**/8 valószínűségi változó szerint
$P\left(\mathbf{Z} \le \frac{q^* - 40}{10}\right) = .333$. Így $F\left(\frac{q^* - 40}{10}\right) = .333$
Mivel F(-.43)=.333,

$\frac{q^* - 40}{10} = -.43$, tehát $q^*=35.7$.
Vagyis 35 vagy 36 teljes munkaidős alkalmazottat érdemes foglalkoztatni.

7. $d \le q$ esetén a költség $c_1(d, q) = c_o q + \bar{c}d + \bar{k}$
$d \ge q$ esetén a költség $c_2(d, q) = -c_u q + c'd + k'$
Bármekkora q=d esetén $c_1(q,q) = c_2(q,q)$.

A várható költség =

$$= E(q) = \int_0^q c_o q f(t)dt + \int_q^\infty -c_u q f(t)dt +$$

$$+\int_0^q (c\bar{t} + k)f(\bar{t})dt + \int_q^\infty (c't + k')f(t)dt.$$

A Leibnitz szabály és $c_1(q, q) = c_2(q, q)$ alapján ($F(q) = P(\mathbf{D}\le q)$)
$E'(q) = c_oF(q) - c_u(1 - F(q)) = 0$ az optimális q^* -nál, melyet
$F(q^*) = c_u/(c_o + c_u)$ alapján kapunk.
Mivel $E''(q^*) = (c_o + c_u)f(q^*) > 0$, q^* -nál minimum van.

15.5. alfejezet megoldásai

1. Legyen x = a tűz helye; s = a tűzoltóállomás helye.
Ha $s\le x$, akkor a tűzoltóállomás és a tűz közötti távolság $x - s$;
ha $s\ge x$, akkor a tűzoltóállomás és a tűz közötti távolság $s - x$.
Az átlagos távolság (amit minimalizálunk) s függvényében:

$$D(s)= \int_0^s (s - x)2x\, dx + \int_s^1 (x - s)2x\, dx$$

$$=[x^2s - 2x^3/3]_0^s + [2x^3/3 - x^2s]_s^1$$

$$=2s^3/3 - s + 2/3$$

$D'(s) = 2s^2 - 1 = 0$ amikor $s^* = (1/2)^{1/2}$. Mivel $D''(s) = 4s\ge 0$, $D(s)$ konvex függvény, így s^* minimalizálja $D(s)$ -t.

2a. Jelöljük $f(z)$ -vel **Z** sűrűségfüggvényét; $c(x)$ –szel a kormányzat várható költségét ha a pénzkínálat x %-kal nő. $d = z x$.
Így $c(x) = \int (zx - k)^2 f(z)\, dz = \int z^2x^2f(z)dz - \int 2xkzf(z)dz + k^2$
Mivel k és x konstansok a z szerinti integráláskor, kiemelhetőek az integráljel elé:
$c(x) = x^2E(\mathbf{Z}^2) - 2xkE(\mathbf{Z}) + k^2$.
Így
$c'(x) = 2xE(\mathbf{Z}^2) - 2kE(\mathbf{Z})$;
$c'(x) = 0$ amikor $x^* = k\, E(\mathbf{Z})/E(\mathbf{Z}^2)$.
Mivel $c''(x)= 2E(\mathbf{Z}^2)>0$, $c(x)$ konvex, x^* minimalizálja a várható költséget.

2b. Felhasználva, hogy $E(\mathbf{Z}^2) = \mathrm{var}\, \mathbf{Z} + E(\mathbf{Z})^2$, x^* átírható
$x^* = k\, E(\mathbf{Z})/[\mathrm{var}\, \mathbf{Z} + E(\mathbf{Z})^2]$ alakba, amiből látszik, hogy rögzített $E(\mathbf{Z})$ esetén (feltéve, hogy $E(\mathbf{Z})>0$), a nevezőben lévő var **Z** növekedése csökkenti x^* -ot.

15.6. alfejezet megoldásai

1. $K = \$20$, $E(\mathbf{D}) = 1040$, szórás$(\mathbf{D}) = 43.26$, $L = 1/52$ év,
$h = \$20$/liter-év, $c_B = \$50$/liter
$E(\mathbf{X})=1040/52 = 20$ és szórás$(\mathbf{X}) = 43.26/(52)^{1/2} = 6$.

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(20)(1040)}{20}} = 45.607$$

(13) alapján

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{20(45.607)}{50(1040)} = .018$$

Standardizálva azt kapjuk, hogy

$$P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r - 20}{6}\right) = .018$$

Mivel F(2.10) = .982, azt kapjuk, hogy r = 20 + 6(2.107) = 32.643 és a biztonsági készlet 32.643 - 20 = 12.643.

Azzal a valóságidegen feltételezéssel élünk e feladatban, hogy a vér sosem romlik meg.

Legyen s = r = 32.643 és S = r + EOQ = 32.643 + 45.607 = 78.25.

2. E(**D**) = 1040 , szórás(**D**) = 50.99, K = $100 L = 1/26 év, c_B = $50/szék, h = $18/szék-év. Nem pótolható hiány esetén c_{LS} = 50 + (100 - 60) = $90.

2a. E(**X**) = 1040(1/26) = 40 és szórás(**X**) = 50.99$(1/26)^{1/2}$ = 10.

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(100)(1,040)}{18}} = 107.50$$

A (13) egyenletből

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{18(107.5)}{50(1040)} = .037$$

Standardizálva azt kapjuk, hogy

$$P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r-40}{10}\right) = .037$$

. Mivel F(1.79)=.963,

r = 40 + 10(1.79) = 57.84 és

a biztonsági készletszint = 57.84 - 40 = 17.84.

2b. A (15) egyenletből

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{18(107.5)}{18(107.5) + 90(1040)} = .020$$

Standardizálva azt kapjuk, hogy

$$P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r-40}{10}\right) = .02.$$

Mivel F(2.05) = .980, r = 40 + 10(2.05) = 60.5 és

a biztonsági készletszint = 60.5 - 40 = 20.5.

3. Normális eloszlás(várható érték, variancia) –ként érti az adatot a

szerző, nem a szórást adja meg. var(**D**)= 3072.49.
Hiányköltség = 80\$/egységen csak a hírnévromlási egységköltséget érti a szerző, nem érti bele az elszalasztott árkülönbözetet. c_{LS} = 80 + (40 - 30) = \$90
E(**X**) = 960/12 = 80, E(**D**)= 960, szórás(**X**) = 55.43/(12)$^{1/2}$ = 16, h = \$6/egység-év, c_B = \$80/egység, K = \$50.

3a. $$EOQ = \sqrt{\frac{2(50)(960)}{6}} = 126.49$$

$$P(\mathbf{X}\geq r^*) = \frac{6(126.49)}{80(960)} = .010$$

Standardizálva azt kapjuk, hogy $P\left(\mathbf{Z}\geq \frac{r^* - 80}{16}\right) = .01$

F(2.33) = .99. Így $\frac{r^* - 80}{16} = 2.33$, amiből r* = 117.3

3b. EOQ független attól, hogy a hiány pótolható vagy sem, tehát ezesetben is annyi, amennyinek 3a.ban kiszámoltuk.

$$P(\mathbf{X}\geq r^*) = \frac{6(126.49)}{6(126.49) + 90(960)} = .009$$

Mivel F(2.38) = .991,

$$\frac{r^* - 80}{16} = 2.38, \text{ vagyis } r^* = 118.$$

4. $$EOQ = \sqrt{\frac{2(30)(10,400)}{3}} =456.07$$

Így E(**D**)/q* = 10,400/456.07 = 22.80 rendelési ciklus van évente.
Nézzük meg, hogy előnyös-e (adott q* megtartása mellett) az újrarendelési készletszintet r-ről r+1-re növelni. Hatásai:
- A mindenkori készletszintet 1-gyel növeli, így az átlagos készletszintet is.
- Az éves készlettartási költség növekedése = \$3 (amennyi h).
- Minden ciklusban 1-gyel kevesebb lesz a hiány amikor egyáltalán lesz hiány (a ciklusok P(**X**>r+1) hányadában lesz hiány). Egy ciklusban átlagosan P(**X**>r+1) 3 –mal kisebb lesz a hiányköltség, tehát évente 22.8-szor ennyi, P(**X**>r+1) \$68.40 a hiányköltség csökkenése. Így r helyett addig érdemes r+1 –re növelni, ameddig még fennáll, hogy (azaz r* a legnagyobb r+1 amelyre még) 68.40 P(**X**>r+1) ≥ 3, vagyis

$$P(\mathbf{X}>r+1) \geq 3/68.40= 0.044.$$

A táblázatból E(**X**) = 195, var(**X**) = 250, szórás(**X**) = 15.81.
Standardizálva P(**Z**>1.708) ≥ 0.044; (r+1–E(**X**))/szórás(**X**)=1.708. r=221 lenne ha **X** normális eloszlású lenne, de nem az, hanem diszkrét eloszlású. 220-nál nagyobb x-re nincs esély, ennél nagyobb r-et biztosan nem érdemes

tartani. De kisebbet sem, mert akkor a ciklusok legalább 15%-ában hiány lenne, mégpedig legalább 220-r egységnyi. Pl. ha r=219 lenne, akkor az r=220-hoz képest megtakarítanánk évente 3$ -t a készlettartási költségből, viszont megjelenne évente 0 helyett várhatóan 22.80 * 0.15 = 3.42 ciklusban 1 egységnyi hiány, vagyis évente 10.26$ -ral nőne a hiányköltség, összességében tehát rosszabbul járnánk. Tehát az újrarendelési készletszint r* = 220 legyen.

5. Közelítsünk azzal, hogy úgy tekintjük, mintha t = 0 és t = 3 között a készletszint egyenletesen (konstans meredekséggel) csökkenne 200–ról kb. 20-ra. Így t = 0 és t = 3 között az átlagos rendelkezésre álló készletszint (200 + 20)/2 = 110. t = 3 és t = 6 között is egyenletes készletcsökkenéssel számoljunk, 260-ról 0-ra. Tehát t = 3 és t = 6 között az átlagos rendelkezésre álló készletszint (260 + 0)/2 = 130. t = 6 és t = 7 között a rendelkezésre álló készletszint = 0. Így t = 0 és t = 7 között az átlagos rendelkezésre álló készletszint = 3/7(110) + 3/7(130) + 1/7(0) = 720/7 = 102.86
Közelítsünk azzal, hogy úgy tekintjük, mintha t = 6 és t = 7 között a hiányszint egyenletesen (konstans meredekséggel) nőne 0–ról 100-ra, így az átlagos hiányszint t = 6 és t = 7 között (0 + 100)/2 = 50. Így az átlagos hiányszint t = 0 és t = 7 között 6/7(0) + 1/7(50) = 7.14.
Az átlagos hiányszint az átlagos rendelkezésre álló készletszintnek 7.14/102.86 = 7%-a, tényleg kicsi.

6. Egy ciklus végén (közvetlenül egy rendelés beérkezése előtt) a várható rendelkezésre álló készletszint = r - (E(**X**) - E($\mathbf{B}_r$)).
Ez abból következik, hogy az utánpótlási idő alatti kereslet várható értéke E(**X**), de ebből átlagosan E($\mathbf{B}_r$) mennyiség nem fog realizálódni (ha van hiány a ciklus során), hanem elveszett, nem pótolható kereslet lesz, ami nem csökkenti a rendelkezésre álló készletet (ami 0 alá nem tud csökkenni). Egy ciklus kezdetén éppen beérkezik egy q mennyiségű rendelés, a készletszint = r - E(**X**) + E($\mathbf{B}_r$) + q. Így az átlagos rendelkezésre álló készletszint r - E(**X**) + E($\mathbf{B}_r$) + q/2. (?Egy törött vonal átlaga nem a végpontjai átlagánál van). Ha r -ről r+Δ –ra növeljük a rendelési készletszintet, akkor a készlettartási költség változása h(r+Δ - r + E($\mathbf{B}_{r+\Delta}$) - E($\mathbf{B}_r$)).
Ha **X**<=r, akkor $\mathbf{B}_{r+\Delta}$ - $\mathbf{B}_r$ = 0 (mert mindkettő 0), és ha **X**>r, akkor $\mathbf{B}_{r+\Delta}$ - $\mathbf{B}_r$ = -Δ.

Így E($\mathbf{B}_{r+\Delta}$) - E($\mathbf{B}_r$) = -Δ P(**X**≥r). Így ha r -ről r+Δ –ra növeljük a rendelési készletszintet, akkor
- az éves készlettartási költség változása h Δ [1 - P(**X**≥r)]
- a hiányköltség várható változása egy ciklusban P(**X**≥r) valószínűséggel (avagy a ciklusok P(**X**≥r) hányadában) = $$c_{LS}$ Δ,
- évente pedig ciklusdarabszámszor = E(**D**)/q* -szor ennyi:

$$\frac{E(\mathbf{D})\ c_{LS}\ \Delta\ P(\mathbf{X}\geq r)}{q^*}$$

Így a rendelési készletszintet akkorára kell állítani, hogy

$$\frac{E(\mathbf{D})\ c_{LS}\ \Delta\ P(\mathbf{X}\geq r)}{q^*} = h\ \Delta\ [1 - P(\mathbf{X}\geq r)] \text{ legyen, vagyis}$$

$$P(\mathbf{X}\geq r) = \frac{hq^*}{}$$

$hq^* + c_{LS}\,E(\mathbf{D})$

6b. Mert csak az el nem vesző, realizálódó kereslteknek megfelelő mennyiséget kell évente rendelni. **D** a szándékolt éves kereslet; de csak E(**D**) - ciklusszám E($\mathbf{B}_r$) a várható megvalósuló éves forgalom. Ezt pedig q rendelési mennyiségekkel [E(**D**) - ciklusszám E($\mathbf{B}_r$)]/q számú rendelés adja. Az évente elveszett eladások várható értéke = ciklusszám E($\mathbf{B}_r$).

7. E feladatban S-nek semmi köze az alfejezet S-sel jelölt fogalmához, véletlen, hogy azonos betűt használunk.
Ha r -ről r+Δ –ra növeljük a rendelési készletszintet, akkor
- az éves készlettartási költség változása h Δ
- a hiányköltség csak olyan ciklusban változik (S-ről 0 dollárra), amikor az utánpótlási idő alatti kereslet (**X**) r és r + Δ közötti (ha **X**>r+Δ, akkor így is-úgy is S$; ha **X**<r, akkor így is-úgy is 0$). A hiányköltség változásának valószínűsége = Δ f(x), ahol f(x) = az **X** sűrűségfüggvénye. A hiányköltség várható változása egy ciklusban Δ f(r) S, évente pedig ennek éves ciklusszámszorosa:

$$\frac{E(\mathbf{D})\,S\,\Delta\,f(r)}{q}.$$

Optimum azon r-nél van, ahol ez egyenlő az éves készlettartási költség növekményével:

$$f(r) = \frac{hq}{E(\mathbf{D})\,S}$$

Ahhoz, hogy ez az összköltség minimumát adja, szükséges, hogy f(r) környékén f(x) már csökkenő függvénye legyen x -nek. A jobb oldal r-től független konstans, és úgy kell metszeniük egymást, hogy a megtakarítás egyre csökkenjen.

8. Gyorsan forgónak azt a terméket nevezik, amely átlagosan rövid időt tölt a raktárban. Egy termék átlagosan a ciklusidő felét tölti raktárban = q/[2 E(**D**)]. Gyorsan forgó terméknél q/[2 E(**D**)] kicsi, azaz q/E(**D**) kicsi, azaz rövid a ciklusideje, azaz gyakran rendelik, vagyis nagy a ciklusszáma. (13) azt írja le, hogy a készlethiányos ciklusok valószínűsége, P(**X**≥r) = h/c_B * q/E(**D**). Ami kicsi, ha q/E(**D**) kicsi. **X** adott eloszlása mellett ha P(**X**≥r) kicsi, akkor r nagy, r-E(**X**) (a biztonsági készletszint) nagy.

9. Legyen $\mathbf{M}_t$ = a t. havi kereslet és **Y** = az éves kereslet. Mivel **Y** = $\mathbf{M}_1$ + $\mathbf{M}_2$ + ... $\mathbf{M}_{12}$, ezért 600 = E(**Y**) = 12(egy havi kereslet várható értéke) és 300 = var **Y** = 12(egy havi kereslet varianciája). Így a havi kereslet várható értéke 50, varianciája 25, szórása 5.

15.7. alfejezet megoldásai

1. A 15.6 alfejezet 1. feladatának megoldásából q = 45.61, E(**X**) = 20, szórás(**X**)=6.
80% -os szolgáltatási szinthez

$$NL\left(\frac{r-20}{6}\right) = \frac{45.61(.2)}{6} = 1.52 \text{ kell legyen.}$$

Mivel NL(-1.49) = 1.52, ezért $\frac{r-20}{6} = -1.49$, így r = 20 - 6(1.49) = 11.06.

6

90% -os szolgáltatási szinthez

$$NL\left(\frac{r-20}{6}\right) = \frac{(45.61)(.1)}{6} = .76$$

Mivel NL(-.59) = .76,

$$\frac{r-20}{6} = -.59, \text{ innen } r = 20 - 6(.59) = 16.46$$

95% -os szolgáltatási szinthez

$$NL\left(\frac{r-20}{6}\right) = \frac{45.61(.05)}{6} = .38$$

Mivel NL(.04) = .38, $\frac{r-20}{6} = .04$ és r = 20 + (.04)6 = 20.24

99% -os szolgáltatási szinthez

$$NL\left(\frac{r-20}{6}\right) = \frac{45.61(.01)}{6} = .076$$

Mivel NL(1.05) = .076, ezért r = 20+6(1.05) = 26.30

A (19) egyenletet használjuk arra, hogy meghatározzuk, hogy mely rendelési készletszint esetén várható évente 0.5 hiány. Azt akarjuk, hogy

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{45.61}{1040} 0.5 = .022$$ legyen.

Standardizálva

$$P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r-20}{6}\right) = .022.$$ Mivel F(2.01) = .978,

$$\frac{r-20}{6} = 2.01$$ és r = 32.06.

2. q = 107.50, E(**X**) = 40 szórás(**X**) = 10

80% -os szolgáltatási szinthez

$$NL\left(\frac{r-40}{10}\right) = \frac{(107.50).20}{10} = 2.15$$

Mivel NL(-2.14) = 2.15, r = 40 - 2.14(10) = 18.6

90% -os szolgáltatási szinthez

$$NL\left(\frac{r-40}{10}\right) = \frac{(107.50)(.10)}{10} = 1.075$$

Mivel NL(-.99) = 1.075, r = 40 - .99(10) = 30.1

95% -os szolgáltatási szinthez

$$NL\left(\frac{r-40}{10}\right) = \frac{(107.50)(.05)}{10} = .538$$

Mivel NL(-.25) = .536, r = 40-.25(10) = 37.5

99% -os szolgáltatási szinthez

$r-40 \qquad (107.5)(.01)$

$$NL\left(\frac{\quad}{10}\right) = \frac{\quad}{10} = .108$$

Mivel NL(.86) = .108, r = 40 + .86(10) = 48.60

A (19) egyenletet használjuk arra, hogy meghatározzuk, hogy mely rendelési készletszint esetén várható évente 2 hiány.

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{2(107.50)}{1040} = .207$$

Standardizálva $P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r - 40}{10}\right) = .207$. Mivel F(.82) = .794 van legközelebb .793 –hez,

$$\frac{r - 40}{10} = .82, \text{ amiből } r = 48.2$$

3a. Várható hiány ciklusonként = 5(1/4) = 1.25

Így a várható időben kielégített kereslet mennyiség ciklusonként = 100 - 1.25 = 98.75

Mivel 1000/100 = 10 ciklus van évente,

$$SLM_2 = \frac{987.50}{1,000} = .9875$$

3b. Válasszuk a legkisebb rendelési készletszintet, amellyel átlagosan legfeljebb 5 egységnyi hiány jár ciklusonként (azaz 50 egységnyi hiány évente; SLM_1 = 95%.)

r = 10 következtében a várható legnagyobb hiányszint = 1/4(5) + 1/4(10) + 1/12(15) + 1/4(20) = 10 egységnyi hiány/ciklus.

r = 15 esetén (1/4)5 + (1/12)10 + (1/4)15 = 35/6 egységnyi hiány/ciklus várható.

r = 20 esetén pedig (1/12)5 + (1/4)10 = 35/12 egységnyi hiány/ciklus várható.

Tehát r=20 a legkisebb rendelési mennyiség, amellyel az SLM_1 időben kiszolgálási mérték legalább 95%.

3c. Helyesebben az a feladat, hogy legfeljebb átlagosan 2 hiányt akarunk. Válasszuk a legkisebb rendelési készletszintet, amely még kielégíti, hogy egy ciklusban hiány fellépésének valószínűsége legfeljebb 20%:

$$P(\mathbf{X} > r) = \frac{2(100)}{1000} \leq .20$$

$P(\mathbf{X}>29)$ = 1/4 és $P(\mathbf{X}>30)$ = 0, így (legalább) r = 30 szükséges annak biztosításához, hogy évente átlagosan legfeljebb 2 egységnyi hiány forduljon elő.

$$4.\ NL\left(\frac{r-1000}{200}\right) = 780(1 - .90)/200 = .39.\ NL(.02) = .39$$

$q = [2(50)(365)(100/6]^{1/2}$ = 780. r = 1000 + .02(200) = 1004. Biztonsági készlet = 1004 - 1000 = 4. Ezzel a 4 egységgel egész évben magasabb a készletszint, az átlagos készletszint, a biztonsági készlet éves készlettartási költsége = h 4 = $24.

15.8. alfejezet megoldásai

1. EOQ = $[2(10{,}000)(530)/5]^{1/2}$ = 1456 R = 1456/10,000 = .1456 év. R + L = .23 év. D_{L+R} is $N(2300, 384^2)$. $P(D_{L+R} \geq S)$ = (.1456)5/100 = .007. Mivel $P(Z \geq 2.45)$ = .007 S = 2300 + 384(2.45) = 3241.

2. EOQ = $[2(20{,}000)(10{,}400)/10]^{1/2}$ = 6450 R = 6450/20,000 = .32 év. R + L = .36 év. D_{L+R} is $N(7200, 1200^2)$. $P(D_{L+R} \geq S)$ = (.32)10/100 = .032. Mivel $P(Z \geq 1.85)$ = .032 S = 7200 + 1200(1.85) = 9420.

3. Hiányos ciklus előfordulásának valószínűsége azért kisebb az elvesző kereslet esetében, mert $Rh/(Rh + c_{LS}) < Rh/c_B$. Így elvesző kereslet esetében S>50.

15.9. alfejezet megoldásai

1. A típusú termék az 1 és 2-es; B típusú a 3-6-os; C típusú a 7-10-es.

15. fejezet áttekintő feladatok megoldásai

1a. q = a sütött sütemények tucatszáma naponta (tucat/nap)
d = a keresett sütemények tucatszáma naponta (tucat/nap)

$d \leq q$ esetén $c(d, q) = -4.2d + 1.8q - .60(q - d) = 1.2q - 3.6d$

$d \geq q$ esetén $c(d, q) = -4.2q + 1.8q = -2.4q$

Ezekből $c_o = 1.2$ és $c_u = 2.4$. q* tucat süteményt kell (nyitás előtt) sütni naponta, ahol q* a legkisebb szám, ami kielégíti, hogy $F(q^*) \geq 2.4/(1.2 + 2.4) = .667$. Így q* = 40 tucat süteményt kell (nyitás előtt) sütni naponta.

1b. $P(\mathbf{D} \leq q^*) = .667$. Standardizálva

$$P\left(\mathbf{Z} \leq \frac{q - 50}{20}\right) = .667.$$ Mivel F(.43) = .666, azt kapjuk, hogy

$$\frac{q - 50}{20} = .43,$$ vagyis q* = 58.6 tucat sütemény.

1c. $P(\mathbf{D} \leq q) = \int_0^q (e^{-x/50}/50)\,dx = 1 - e^{-q/50}$

Így azt a q* mennyiséget választjuk, amelyre teljesül $1 - e^{-q/50} = .667$, vagyis $.333 = e^{-q^*/50}$, vagyis $-q^*/50 = \ln .333$, vagyis q* = 54.98 tucat sütemény.

2. Számoljunk 52 hét = 1 évvel. K = \$200 h = \$8/keret-év, E(**D**) = 1040, E(**X**) = 20 keret,

Szórás(**X**) $= \sqrt{15.73} / \sqrt{52}$ = .55 keret, c_B = \$50 per keret

2a.

$\sqrt{2(200)(1040)}$

$$EOQ = \sqrt{\frac{\quad}{8}} = 228.04$$

r –et az alábbi egyenletből határozzuk meg:

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{8(228.04)}{50(1040)} = .035$$

Standardizálva

$$P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r - 20}{.55}\right) = .035. \text{ Mivel } F(1.81) = .965,$$

$$\frac{r - 20}{.55} = 1.81, \text{ vagyis } r = 21.00$$

2b. $c_{LS} = 50 + (70 - 40) = \$80.$

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{8(228.04)}{8(228.04) + 80(1040)} = .021$$

Standardizálva

$$P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r - 20}{.55}\right) = .021. \text{ Mivel } F(2.03) = .979,$$

$$r = 20 + .55(2.03) = 21.12.$$

2c.

$$NL\left(\frac{r - 20}{.55}\right) = \frac{228.04(.05)}{.55} = 20.73$$

N(-20.73) = 20.73, így

$$\frac{r - 20}{.55} = -20.73, \text{ vagyis } r = 8.60$$

2d. $$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{2(228.04)}{1040} = .439$$

$$P\left(\mathbf{Z} \geq \frac{r - 20}{.55}\right) = .439. \ F(.15) = .561$$

Így $r = 20 + .55(.15) = 20.08$

3a. c_B = hiányköltség/egység ha pótolható a kereslet

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(100)(5000)}{2}} = 707.11$$

80 - 20

$$P(\mathbf{X}\geq 80) = P(\mathbf{Z}\geq \frac{\quad}{30}) = 1 - .9772 = .0228$$

Azaz egy ciklusban hiány előfordulásának valószínűsége .0228. A (13) egyenletből

$$.0228 = \frac{2(707.11)}{c_B(5000)}, \text{ vagyis}$$

$$c_B = \frac{2(707.11)}{.0028(5000)} = \$12.41$$

3b. c_{LS} = hiányköltség/egység ha nem pótolható a kereslet
c_{LS} = hírnévromlási egységköltség + (eladási - beszerzési ár)

$$.0228 = \frac{2(707.11)}{2(707.11) + 5000c_{LS}}$$

Ebből c_{LS} = \$12.12. Mivel 8 - 5 = \$3 árkülönbözetet szalasztunk el kielégítetlen kereslet egységenként, ezért c_{LS} = 3 + hírnévromlási egységköltség; tehát a hírnévromlási egységköltség = \$9.12.

$$\text{3c. } NL\left(\frac{r - 20}{30}\right) = \frac{707.11(.10)}{30} = 2.36$$

NL(-2.36) = 2.36, innen

$$\frac{r - 20}{30} = -2.36, \text{ vagyis } r = -50.8. \text{ Így } r = 0 \text{ –t válasszuk.}$$

$$\text{3d. } P(\mathbf{X}\geq r) = \frac{0.5(707.11)}{5000} = .071$$

Standardizálva

$$P\left(\mathbf{Z}\geq \frac{r - 20}{30}\right) = .071. \text{ Mivel } F(1.47) = .929,$$

$$\frac{r - 20}{30} = 1.47, \text{ vagyis } r = 64.1.$$

4. Jelölje a havi készpénzigényt d; a számlán tartott összeget q. Tegyük fel, hogy csak a számlán tartott pénz kamatozik, a többi kamata 0.
$d\leq q$ esetén $c(d, q) = -.02(10,000 - q)$
$d\geq q$ esetén $c(d, q) = .02(d - q) - .02(10,000 - d)$.
Így $c_o = c_u = .02$. Válasszuk a legkisebb q* -ot, amelyre teljesül
$F(q^*)\geq .02(/(.02 + .02) = .50$. F(4999) = .30 és
F(5000) = .50. Így 10,000 - 5000 = \$5000 –t kell a számlán tartani.

5. Jelölje q a rendelési mennyiséget és d a keresletet (azonos idő alatt).

Egy diszkontáruháznak eladott sapkáért végülis \$90 –hoz jut hozzá, ez a visszavételi, maradvány ár.

$d \le q$ esetén $c(d, q) = 100q - 200d - 90(q - d) = 10q - 110d$.

$d \ge q$ esetén $c(d, q) = 100q - 200q = -100q$ (Nincs utórendelés, nem pótolható a hiány.)

Így $c_o = \$10$ és $c_u = 100$. A q^* optimális rendelési mennyiségnél

$$P(D \le q^*) = \frac{100}{100 + 10} = .909.$$ Mivel $F(1.33) = .908$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{q^* - 100}{10} = 1.33,$$ vagyis $q^* = 113.33$.

Ha az eladási ár növekszik \$k -ral, akkor $c_o = 10$ és $c_u = 100 + k$, tehát c_u súlya relatíve megnő c_o –hoz képest: $c_u/(c_o + c_u)$ nő és q^* nő. Több sapkát kell egyszerre rendelnie. Megnő a túlrendelés valószínűsége, csökken az alulrendelésé. Emiatt a (feltételezhetően változatlan) tényleges kereslet kisebb részét nem elégíti ki, növekszik a 200\$-os áron eladott mennyiség. Megnő a túlrendelés, a diszkontáruháznak eladott mennyiség is. Az összes beszerzés is megnő tehát.

6a. $E(\mathbf{X}) = .1(10{,}000) = 1000$, $\text{szórás}(\mathbf{X}) = (.1)^{1/2}(1{,}000{,}000)^{1/2} = 316.2$. Így

$$NL\left(\frac{r-1000}{316}\right) = 2000(.05)/316 = .316.$$

$NL(.18) = .315$, így $(r-1000)/316 = .18$, vagyis $r = 1000 + 316(.18) = 1057$. A biztonsági készlet mindkét áruházban = 57.

6b. Áruház helyett raktárakról van szó. Egy raktár $N(20{,}000, 2{,}000{,}000)$ éves keresletet tapasztalna és $EOQ = 2000(2)^{1/2}$. $E(\mathbf{X}) = (1/10)(20{,}000) = 2000$ és $\text{szórás}(\mathbf{X}) = (.1)^{1/2}(2{,}000{,}000)^{1/2} = 447.2$. Innen

$$NL\left(\frac{r-2000}{447.2}\right) = \frac{2000(2)^{1/2}(.05)}{447.2} = .316.$$

Így $(r - 2000)/447.2 = .18$ és $r = 2000 + .18(447.2)$. Ebből a biztonsági készlet $= .18(447.2) = 80.5 < 114$. Egy raktár esetén azért kell kisebb biztonsági készlet mint két raktár biztonsági készletének összege, mert a kereslet szórása kevesebb mint kétszeresére növekszik.

6c. Ha sok helyen van raktár, akkor viszont kisebb a szállítási költség és rövidebb a kiszállítási idő, mert a keresletthez átlagosan közelebbi raktárból elégíthetjük ki a keresletet. Így nem egyértelmű, hogy egy vagy több raktár összköltsége kisebb.