17. fejezet megoldásai

17.2. alfejezet megoldásai

1. A kétállapotú Markov-lánc átmenetmátrixa:

	napos	felhős
napos	.90	.10
felhős	.20	.80

2.

$$p = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

3.

P(holnap j | ma i db kezd el dolgozni)

db kezd dolgozni ma \ holnap	0	1	2
0	0	0	1
1	0	1/3	2/3
2	1/9	4/9	4/9

Például ha ma 0 gép kezd dolgozni, akkor tegnap kellett elromlaniuk és holnap biztosan 2 kezd dolgozni.
Jelölje W_i azt az eseményt, hogy az i. gép elkezdett dolgozni és működőképes marad a mai nap folyamán. Ha ma 2 gép kezd el dolgozni, akkor holnap pontosan akkor kezd 0 gép dolgozni, ha ma mindkettő elromlik, aminek a valószínűsége

$$P(\overline{W_1}\cap\overline{W_2}) = (1/3)^2 = 1/9$$

Ha ma 2 gép kezd el dolgozni, akkor holnap úgy tud 1 elkezdeni dolgozni, hogy (nem marad működőképes az 1. és működőképes marad a 2.), vagy (működőképes marad az 1. és nem marad működőképes a 2.), vagyis a valószínűsége

$$P(\overline{W_1}\cap W_2) + P(W_1\cap\overline{W_2}) = 2(1/3)(2/3) = 4/9$$

Ha ma 2 gép kezd el dolgozni, akkor holnap csak úgy tud 2 elkezdeni dolgozni, ha mindkettő működőképes marad, aminek valószínűsége

$$P(W_1\cap W_2) = (2/3)^2 = 4/9$$

4. A következő napi időjárást meghatározó állapot bármely napon az aznapi és az előző napi időjárás. Például n-f jelölje azt az állapotot, hogy tegnap napos, ma felhős az időjárás. Az átmenet valószínűség mátrix:

	P(holnap ... | a múlt az, hogy …)	
tegnap-ma \ holnap	napos | múlt …	felhős | múlt …
n-n	0.95	0.05
f-n	0.7	0.3
n-f	0.4	0.6
f-f	0.2	0.8

Ha a jövőt meghatározó állapot az utóbbi három nap időjárásának ismétléses variációja, akkor 2^3=8 -féle állapot lenne (n-n-n, n-n-f stb.)

5. Az állapotot két dolog együttese adja (ha a szerencsekártyák lépéses utasításaitól eltekintünk): egyrészt a bábu helye a táblán (melyik mezőn áll a dobás előtt): 0=Start, ..., 39 = Boardwalk, 30 = börtönben van és 0 fordulóból maradt már ki, 30.1 = börtönben van és 1 fordulóból maradt már ki, 30.2 = börtönben van és 2 fordulóból maradt már ki, letöltötte büntetését), másrészt hogy egymás után hányszor dobott a két kockával ugyanakkorát a játékos addig. Az 0-39 mezők valóságos mezők a táblán, 30.1 és 30.2 fiktív mezők. Az eddigi dupladobások száma 0, 1, 2 lehet mindegyik valós mező esetében, csak 0 lehet a fiktív, börtönmezők esetében. Tehát 39*3+3=120 állapot van, az átmenetmátrix 120 x 120 –as. Pl. (3, 3) jelöli azt az állapotot, hogy a Baltic mezőn áll a játékos bábuja és már kétszer ugyanakkorát dobott. Az átmenetmátrix eleme pl.: P[(4,0)|(1,1)]=2/36 (az 1-es mezőről a 4-es úgy lehet jutni, hogy 1+2 vagy 2+1 –et dobunk a 36 variáció közül).

6. Az állapotot egy [w b_0 b_1] hármas írja le, ahol w az aznap dolgozni kezdett gépek száma, b_0 az előző nap során elromlott gépek száma, b_1 az előző előtti napon elromlott gépek száma. (w+b_0+b_1=a gépek száma összesen). Az átmenet valószínűség mátrix:

	[2 0 0]	[1 0 1]	[1 1 0]	[0 2 0]	[0 1 1]	[0 0 2]
[2 0 0]	4/9	0	4/9	1/9	0	0
[1 0 1]	2/3	0	1/3	0	0	0
[1 1 0]	0	2/3	0	0	1/3	0
[0 2 0]	0	0	0	0	0	1
[0 1 1]	0	1	0	0	0	0
[0 0 2]	1	0	0	0	0	0

17.3. alfejezet megoldásai

1. U=városban, S=város vonzáskörzetében, R=vidéken.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \mathrm{S} & \mathrm{R} \end{array} \\ p= & \begin{bmatrix} U & .80 & .15 & .05 \\ S & .06 & .90 & .04 \\ R & .04 & .06 & .90 \end{bmatrix} \end{array}$$

1a. $P_{UU}(2) = [.80\ \ .15\ \ .05] \begin{bmatrix} .80 \\ .06 \\ .04 \end{bmatrix} = .651$

$$P_{US}(2) = [.80\ .15\ .05] \begin{bmatrix} .15 \\ .90 \\ .06 \end{bmatrix} = .258$$

$$P_{UR}(2) = [.80\ .15\ .05] \begin{bmatrix} .05 \\ .04 \\ .90 \end{bmatrix} = .091$$

Vegyük észre, hogy e valószínűségek összege 1, hiszen pontosan egy helyen fog lakni egy városlakó két év múlva (is).

b. **q** = [.40 .35 .25]. A keresett valószínűség =

$$\mathbf{q}\ (P^2 \text{ első } \textbf{oszlopa}) = [.40\ .35\ .25] \begin{bmatrix} .651 \\ .104 \\ .072 \end{bmatrix} = .351$$

c. A költözési tendenciák idővel változnak (pl. régebben városokba költöztek, mostanában kiköltöznek a városokból). Így nem stacionárius e Markov-lánc.

2. Mindkét válaszhoz ki kell számítani

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-P & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 1-P & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1-P & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-P & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 1-P & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1-P & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-P & P(1-P) & 0 & P^2 & 0 \\ (1-P)^2 & 0 & 2P(1-P) & 0 & P^2 \\ 0 & (1-P)^2 & 0 & P(1-P) & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

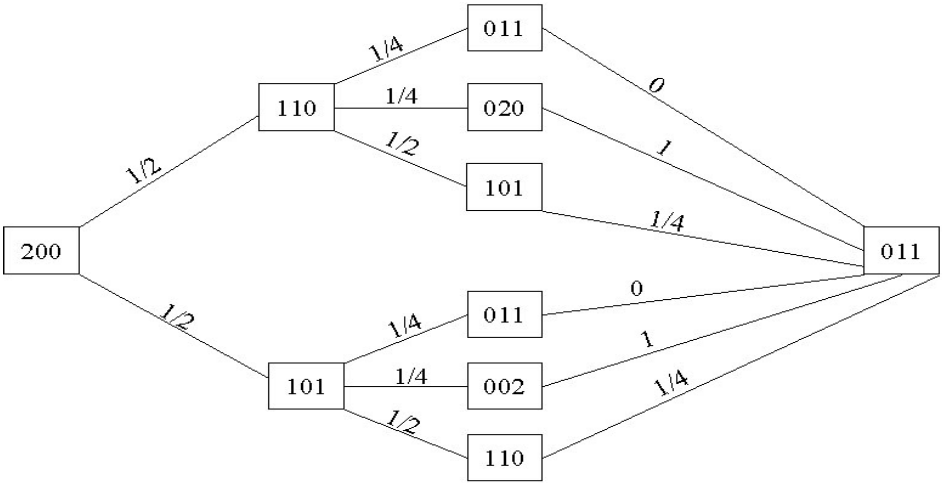
a. $P_{23}(2) = 0$, $P_{22}(2) = 2p(1-p)$

b. $P_{22}(3)=(P^2$ 3.sora) (P 3. oszlopa) =

$$=[(1-p)^2\ 0\ 2p(1-p)\ 0\ p^2]\begin{bmatrix}0\\P\\0\\1-P\\0\end{bmatrix} = 0$$

3a. Mivel a [2 0 0] állapotból indulunk, az egyetlen út a [0 2 0] állapotba két lépésben: [2 0 0]-[1 1 0]-[0 2 0]. Ennek valószínűsége (1/2)(1/4) = 1/8

3b. A folyamatábra mutatja, hogy [2 0 0]-ból milyen állapotokba lehet jutni, azokból mely állapotokba lehet jutni, és (a 3. lépésben) azokból milyen valószínűséggel lehet a [0 1 1] állapotba jutni. A válasz az utak valószínűségeinek összege:
(1/2)(1/4)(1) + (1/2(1/2)(1/4) + (1/2)(1/4)(1) + (1/2(1/2)(1/4) = 6/16.



17.4. alfejezet megoldásai

1. Az 1, 2 és 3 $-os állapotok periódusideje 2. Ahhoz, hogy visszatérjen a játékos egy állapotba (a 0-n és 4-en kívül), közben ugyanannyit kell nyernie mint vesztenie. Minden fordulóban vagy nyer, vagy veszít, így páros számú forduló kell legyen közben.

2. Igen, minden állapot kommunikál mindegyikkel és egyik sem periodikus.

3a. A 4-es állapot tranziens.
3b. Az 1, 2, 3, 5 és 6-os állapotok visszatérők.
3c. E Markov-lánc zárt halmazai: {1, 3, 5} és {2, 6}.
3d. Mivel a 4-es és 1-es állapotok nem kommunikálnak, e Markov-lánc nem ergodikus.

4. P_1 ergodikus és minden állapot visszatérő. P_2 nem ergodikus, mert van elnyelő állapota.
P_2 –ben az 1, 2 és 3 állapotok tranziensek, a 4-es állapot viszont elnyelő.

5. Az állapot az 54 játékos pénzállományának $[d_1\ d_2\ \dots\ d_{54}]$ vektora. 54 elnyelő állapot van, azok, amelyekben minden pénz az egyik (i.) játékosnál van: d_i=$540,000 a vektor többi eleme pedig = 0.

6. P_1 ergodikus. P_2 nem ergodikus (mert az 1-es és 2-es állapotok nem kommunikálnak).

17.5. alfejezet megoldásai

1. (Jelölje 1 = U, 2 = S, 3 = R). A harmadik egyensúlyi állapot egyenlet helyett $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ –et írva:
$\pi_1 = .80\pi_1 + .06\pi_2 + .04\pi_3$
$\pi_2 = .15\pi_1 + .90\pi_2 + .06\pi_3$
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$
Az egyenletrendszer megoldása $\pi_1 = 38/183$, $\pi_2 = 90/183$ és $\pi_3 = 55/183$. Vagyis a családoknak kb. 21%-a városokban, kb. 49%-a városok közelében, kb. 30%-a vidéken fog élni amikor beáll a dinamikus egyensúly.

2. Világos, hogy a játékos vagy $4 -ral, vagy $0 –ral fejezi be a játékot. Mivel annak feltételes valószínűsége, hogy $4 -ral, vagy $0 –ral fejezi be a játékot eltér attól függően, hogy mennyi pénze volt kezdetben (azaz P^{∞} sorai eltérnek), ezért nincs egyensúlyi valószínűség eloszlás vektor (azaz közös sorvektor).

3a. $\pi_1 = 2\pi_1/3 + .5\pi_2$ és $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Így $\pi_1 = .6$ és $\pi_2 = .4$.

3b. $\pi_1 = .8\pi_1 + .8\pi_3$, $\pi_3 = .8\pi_2$, és $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Itt nem mechanikusan az utolsó egyenlet helyett tettük be az egyensúlyi valószínűségek összegének egyenletét, hanem inkább egy nála bonyolultabb (több változót tartalmazó, esetleg legcsúnyább törteket tartalmazó), a legbonyolultabb második egyenletet tekintettük redundánsnak és hagytuk el. Az elhagyandó egyenletet mindig olyan alapon érdemes kiválasztani, hogy P oszlopait nézzük meg és azt választjuk az elhagyáshoz, amelyik oszlopában a legtöbb nemnulla (legkevesebb 0) van, ha pedig több ilyen oszlop is van, akkor amelyik törtjeivel a legnehezebb lenne számolni. Az egyenletrendszer megoldása $\pi1 = 16/25$, $\pi2 = 1/5$, és $\pi_3 = 4/25$.

3c. $m_{11} = 1/\pi_1 = 1/.64 = 1.56$, $m_{12} = 1 + .8m_{12}$, $m_{13} = 1 + .8m_{13} + .2m_{23}$, $m_{21} = 1 + .2m_{21} + .8m_{31}$, $m_{22} = 1/\pi_2 = 1/.2 = 5$, $m_{23} = 1 + .2m_{23}$, $m_{31} = 1 + .2m_{21}$, , $m_{32} = 1 + .8m_{12}$, $m_{33} = 1/\pi_3 = 1/.16 = 6.25$. Az egyenletrendszer megoldása $m_{11} = 1.5625$, $m_{12} = 5$, $m_{13} = 6.25$, $m_{23} = 1.25$, $m_{21} = 2.8125$, $m_{31} = 1.5625$, $m_{22} = 5$, $m_{32} = 5$, $m_{33} = 6.25$.

4. (Tekintsük az év eleji, az esetleges autócsere előtti állapotokat.)
Ha nem cseréljük ki az elfogadható autót jóra, hanem megtartjuk, akkor az átmenetvalószínűség mátrix, P:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{G} & \text{F} & \text{BD} \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ F \\ BD \end{array} & \begin{bmatrix} .85 & .10 & .05 \\ 0 & .70 & .30 \\ .85 & .10 & .05 \end{bmatrix} \end{array}$$

(P^T - I) utolsó sora kicserélve **1** -ra (ez az **1** **π** = 1 egyenlet)

-0.15	0	0.85
0.1	-0.3	0.1
1	1	1

(P^T - I) legbonyolultabb (i.) sorát kicseréljük **1**-ra ((10): **1** **π** = 1), a kapott mátrixot invertáljuk, az inverz i. oszlopa adja **π** –t.
Az egyensúlyi valószínűség vektor: π_G = .6375, π_F = .25, és π_{BD} = .1125. Így az éves várható költség = 1000(.64) + 1500(.25) + .11(6000+1000) = $1785.
(Mivel jó autónk lesz azon években, amikor az évet jó vagy rossz autóval kezdjük, és elfogadható autónk lesz amikor elfogadhatóval: 1000(.64 + .11) + 1500(.25) + .11(6000) –ként is írhatjuk ugyanezt.)

Ha egy elfogadható autót (mindig) jóra cserélünk (amikor egy jó elfogadhatóvá válik), akkor az átmenetvalószínűség mátrix:

$$\begin{array}{c|ccc} & G & F & BD \\ \hline G & .85 & .10 & .05 \\ F & .85 & .10 & .05 \\ BD & .85 & .10 & .05 \end{array}$$

Ami már azonnal megadja az egyensúlyi valószínűség vektort is:
π_G = .85, π_F = .10, és π_{BD} = .05.
A rosszat mindenképp jóra cseréljük, ez esetben az elfogadhatót is (eladjuk $2000-ért és veszünk egy jót $6000-ért).
Így az éves várható költség = .05(6000) + .1(6000-2000) + 1(1000) = $1700.
Mivel az évek 10% -ában egy elfogadható autót adunk el és minden évben jó autónk lesz.
Ekkor kisebb a várható költség, tehát cseréljük le az elfogadható autót.

5. Azt kell megmutatnunk, hogy bármely s állapotú duplán sztochasztikus mátrix esetén minden π_i = 1/s. Az i. állapot egyensúlyi állapot egyenlete:

(1) $\pi_i = \sum_{k=1}^{k=s} p_{ki}\,\pi_k$. Ha minden π_i=1/s, akkor (1)-be behelyettesítve

$1/s = \sum_{k=1}^{k=s} p_{ki}/s$, amiből /s kiemelhető. Tudjuk, hogy $\sum_{k=1}^{k=s} p_{ki} = 1$, így π_i = 1/s kielégíti mindegyik i állapot egyensúlyi állapot egyenletét.

6a. $\pi_1 p_{1i} + \pi_2 p_{2i} + \ldots + \pi_s p_{si}$. (8) alapján ez éppen π_i.

6b. Az előző válasz megmutatta, hogy 1 lépés múlva ugyanolyan valószínűséggel lesz a rendszer az i. állapotban, mint amilyen (π_i) valószínűséggel az i. állapotban volt, tehát nem változott az eloszlás. Ha bármely egy lépés alatt nem változik az eloszlás, akkor mindig változatlan marad, bármely n lépés esetén is. Annak valószínűsége, hogy az i. állapotban leszünk n lépés után, továbbra is π_i.

6c. Mert az egyensúlyi eloszlásból indulva minden lépésben π_i valószínűséggel leszünk az i. állapotban: ugyanakkora marad, változatlan, stacionárius.

7. Az 1-es részvénynél

$$\begin{array}{ccc} & 10 & 20 \\ P = & \left[\begin{array}{c} .80 \\ .10 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} .20 \\ .90 \end{array}\right] \end{array}$$

Egy nem redundáns oszlopát leolvasva: $\pi_{10} = .8\pi_{10} + .1\pi_{20}$ és $\pi_{10} + \pi_{20} = 1$. Megoldva ezt az egyenletrendszert $\pi_{10} = 1/3$ és $\pi_{20} = 2/3$. Így az 1-es részvény várható árfolyama (1/3)10 + (2/3)20 = \$50/3 = \$16+2/3.

A 2-es részvénynél

$$\begin{array}{ccc} & 10 & 25 \\ P = & \left[\begin{array}{c} .90 \\ .15 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} .10 \\ .85 \end{array}\right] \end{array}$$

Ebből $\pi_{10} = .9\pi_{10} + .15\pi_{25}$ és $\pi_{10} + \pi_{25} = 1$. Megoldva ezt az egyenletrendszert $\pi_{10} = .60$ és $\pi_{25} = .40$. Így a 2-es részvény várható árfolyama (.60)10 + (.40)25 = \$16.
Átlagban az 1-es drágább.

Az 1-es részvénynél $m_{10,10} = 1/\pi_{10} = 3$, $m_{20,20} = 1/\pi_{20} = 1.5$, $m_{10,20} = 1 + .8m_{10,20}$ vagyis $m_{10,20} = 5$, $m_{20,10} = 1 + .9m_{20,10}$ vagyis $m_{20,10} = 10$.
Pl. ha valamely napon az 1-es részvény ára \$10, akkor átlagosan 10 nap telik el, mire először \$20 lesz.
A 2-es részvénynél $m_{10,10} = 1/\pi_{10} = 5/3$, $m_{25,25} = 1/\pi_{25} = 2.5$, $m_{10,25} = 1 + .9m_{10,25}$ vagyis $m_{10,25} = 10$, $m_{25,10} = 1 + .85m_{25,10}$ vagyis $m_{25,10} = 6.67$.

8a. Legyen az állapot a golyók száma az 1-es urnában. A P átmenetvalószínűség mátrix

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Megszorozva balról az egyensúlyi $\boldsymbol{\pi}$ vektorral P-t (azaz kombinálva P sorait π_i súlyokkal) vissza kell kapnunk a $\boldsymbol{\pi}$ vektort. P egyik bonyolultabb oszlopával el se kell végezünk a szorzást, úgyis redundáns egyenletet adna; viszont tudjuk még, hogy $\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{1} = 1$. Számoljunk az első és utolsó oszloppal, mert ezekben kevés szám van, és a 2. és 3. oszlop egyikével: $\pi_0 = \pi_1/3$, $\pi_1 = \pi_0 + 2\pi_2/3$, $\pi_3 = \pi_2/3$, $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Az első két egyenletből π1 = π2. Így π1/3 + π1 + π1 + π1/3 = 1; π1 = 3/8, π2 = 3/8, π0 = 1/8, π3 = 1/8.

8b. $m_{0,0} = 1/\pi_0 = 8$ periódus után.

9.

P(tavaly-idén | tavalyelőtt-tavaly volt-e balesete) mátrix:

tavalyelőtt-tavaly \ tavaly-idén	v-v	n-v	v-n	n-n
v-v	0.1	0	0.9	0
n-v	0.1	0	0.9	0
v-n	0	0.03	0	0.97
n-n	0	0.03	0	0.97

Az egyensúlyi eloszlás: $\pi_{vv} = 1/310$, $\pi_{nv} = 9/310$, $\pi_{vn} = 9/310$, és $\pi_{nn} = 291/310$. Így a többletdíj - kedvezmény átlaga évente
$(1/310)400 + (18/310)(300) - (291/310)100 = \$-75.16$, vagyis egy ügyfélnek átlagosan \$75 –ral több kedvezményt adnak, mint amennyi többletdíjat kérnek.

10a. Mert nem csak az egész halmaz zárt halmaz. Hanem {1,2} és {3,4} is zárt halmaz. Így nem minden állapot kommunikál minden állapottal.

10b. $\lim\limits_{n\to\infty} P_{12}(n)$ nemnulla, viszont $\lim\limits_{n\to\infty} P_{32}(n) = 0$, így nem lehet

$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ minden sora azonos. Tehát függ a sortól, vagyis a kiinduló

eloszlástól, hogy hosszú távon hol milyen valószínűséggel leszünk.

10c. $\lim\limits_{n\to\infty} P_{13}(n) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} P_{41}(n)$

Csak külön az 1. és 2. állapot egy ergodikus Markov-lánc folyamat állapotai. Ebben $\pi_1 = .5 = \lim\limits_{n\to\infty} P_{21}(n)$.

Csak külön a 3. és 4. állapot egy ergodikus Markov-lánc folyamat állapotai. Ebben $\pi_1 = .5 = \lim\limits_{n\to\infty} P_{43}(n)$.

Mivel az 1. és 2. állapot adatai azonosak, a hosszú távú valószínűségük is azonos kell legyen. Ugyanígy a 3. és 4. állapotok is megkülönböztethetetlenek, minden adatuk azonos kell legyen.

11a. Mert van periodikus állapota. Mindegyik állapota periodikus 3 lépés periódussal.

11b. Pl. a $\lim P_{11}(n)$ határérték sem létezik, mert a $P_{11}(n)$ sorozat 0,0,1,0,0,1,0,0 ... , tehát nem marad semelyik szám kis környezetében valamely index fölött.

12. Legyen az állapot a hónap elején működő gép kora. Ha elromlik a gép, akkor rögtön veszünk egy 0 hónapos korú gépet, ezzel kezdünk a következő hónapban.
Az 1. stratégia esetén az átmenetvalószínűség mátrix olyan, hogy a hónap elején a szándékos gépcsere előtt 3 hónapos gép helyett veszünk újat szándékosan:

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & .1 & .9 & 0 & 0 \\ 1 & .2 & 0 & .8 & 0 \\ 2 & .5 & 0 & 0 & .5 \\ 3 & .1 & .9 & 0 & 0 \end{array}$$

P első oszlopa a legbonyolultabb, használjuk e helyett a $\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ egyenletet. A többi egyensúlyi állapot egyenlete: $\pi_3 = .5\pi_2$, $\pi_2 = .8\pi_1$, $\pi_1 = .9\pi_0 + .9\pi_3$. Megoldva $\pi_1 = .9\pi_0 + .9(.4)\pi_1$, vagyis $.64/.9\ \pi_1 = \pi_0$.

$\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=.64/.9$ $\pi_1+\pi_1+.8\pi_1+.4\pi_1=2.91\pi_1=1.$ $\pi_0=.24$, $\pi_1=.34$, $\pi_2=.27$, $\pi_3=.14$
Így a várható havi költség = $500\pi_3+1500[.1\pi_0+.2\pi_1+.5\pi_2+.1\pi_3]=\$435.1$

A 2. stratégia esetén az átmenetvalószínűség mátrix olyan, hogy a hónap elején a szándékos gépcsere előtt 2 hónapos gép helyett veszünk újat szándékosan:

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & .1 & .9 & 0 \\ 1 & .2 & 0 & .8 \\ 2 & .1 & .9 & 0 \end{array}$$

$\pi_2=.8\pi_1$, $\pi_1=.9\pi_2+.9\pi_0$, $\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$. Megoldva $\pi_0=.15, \pi_1=.47, \pi_2=.38$
Így a várható havi költség = $500\pi_2+1500[.1\pi_0+.2\pi_1+.1\pi_2]=\$410.5$

A 2. stratégia esetén az átmenetvalószínűség mátrix:

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & .1 & .9 \\ 1 & .1 & .9 \end{array}$$

Vagyis $\pi_0=.1$ és $\pi_1=.9$

Így a várható havi költség = $500\pi_1+1500[.1\pi_1+.1\pi_0]=\$600$.

Így a 2. stratégia jár a legkisebb költséggel.

13. A feladat szövege helyesebben az, hogy egyenlő valószínűséggel 1 vagy 2 darab számítógépet rendelnek. A számítógépek várható beszerzési költsége 1.5(4000) = \$6000 havonta, függetlenül a rendelési stratégiától, így ezzel nem kell számolni az összehasonlításhoz.
Legyen az állapot a zárókészletszint.

Az 1. stratégia esetén az átmenetvalószínűség mátrix

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}$$

Az egyensúlyi állapot valószínűségek: $\pi_0=0$, $\pi_1 = \pi_3/2$, $\pi_2 = 1/2(\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4)$, $\pi_3 = 1/2(\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_4)$, és e valószínűségek összege 1. Megoldva $\pi_0=\pi_4=0$, $\pi_1=1/6$, $\pi_2=1/2$ és $\pi_3=1/3$.
Rendelés(i költség) a π_0, π_1, π_2 esetekben van, raktározási költség a π_0, π_1, π_2, π_3 esetekben van. Így a várható havi költség = $500*(\pi_0+\pi_1+\pi_2)+100*\pi_1+200*\pi_2+300*\pi_3+400*\pi_4=\$550$.

A 2. stratégia esetén az átmenetvalószínűség mátrix

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}$$

Ami ugyanaz, mintha az 1. stratégia P mátrixát úgy írtuk volna, hogy abból a 0 zárókészlet sorát hagyjuk el, mert az egyensúly szempontjából teljesen felesleges. Itt ugyanilyen alapon nem szerepel az itt felesleges zárókészlet=4 sor és oszlop. Az átmenetmátrixok teljes egyezése miatt nem is kell újra kiszámítani a π_i-ket, ugyanakkorák mint az előbb, csak a nevük (indexük) más.

$\pi_0 = \pi_2/2$, $\pi_1 = 1/2(\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3)$, $\pi_2 = 1/2(\pi_0+\pi_1+\pi_3)$ és e valószínűségek összege 1. Megoldva $\pi_0=1/6$, $\pi_1=1/2$, $\pi_2=1/3$, és $\pi_3=0$.

Így a várható havi költség = $500*(\pi_0+\pi_1)+100*\pi_1+200*\pi_2+300*\pi_3=\$450$.

Így a 2. stratégia jár kisebb költséggel.

17.6. alfejezet megoldásai

1.

$$Q = \begin{array}{c} \\ Fr \\ So \\ Jr \\ Sr \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1. & 2. & 3. & 4. \end{array} \\ \begin{bmatrix} .1 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & .1 & .85 & 0 \\ 0 & 0 & .15 & .80 \\ 0 & 0 & 0 & .10 \end{bmatrix} \end{array} \qquad R = \begin{array}{c} \\ Fr \\ So \\ Jr \\ Sr \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Q & G \end{array} \\ \begin{bmatrix} .1 & 0 \\ .05 & 0 \\ .05 & 0 \\ .05 & .85 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$I-Q=\begin{bmatrix} .9 & -.8 & 0 & 0 \\ 0 & .9 & -.85 & 0 \\ 0 & 0 & .85 & -.80 \\ 0 & 0 & 0 & .10 \end{bmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 1.11 & .99 & .99 & .88 \\ 0 & 1.11 & 1.11 & .99 \\ 0 & 0 & 1.18 & 1.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1.11 \end{bmatrix}$$

1a. Ha elsőévesen kezd, várhatóan elsőévesként = $(I-Q)^{-1}_{11}$ = 1.11 évet,
másodévesként = $(I-Q)^{-1}_{12}$ = .99 évet,
harmadévesként = $(I-Q)^{-1}_{13}$ = .99 évet,
negyedévesként = $(I-Q)^{-1}_{14}$ = .88 évet,
vagyis várhatóan összesen 1.11 + .99 + .99 + .88 = 3.97 évet tölt a State College-ban. Ez kevesebb mint 4 év, mert sokan elhagyják az iskolát mielőtt végeznének.

1b. $\{(I-Q)^{-1}R\}_{12}=[1.11\ .99\ .99\ .88]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .85 \end{bmatrix}= .748$

2.

$$\begin{array}{l|cccc|} & \text{új előf.} & \text{1 éve előf.} & \ge 2 \text{ éve előf.} & \text{felmondó} \\ \text{új előf.} & 0 & .80 & 0 & .20 \\ \text{1 éve előf.} & 0 & 0 & .90 & .10 \\ \ge 2 \text{ éve előf.} & 0 & 0 & .96 & .04 \\ \text{felmondó} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & .80 & 0 \\ 0 & 0 & .90 \\ 0 & 0 & .96 \end{bmatrix}$$

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & .80 & 18 \\ 0 & 1 & 22.5 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Egy új előfizető várhatóan 1 évig fizet elő új előfizetőként, .80 évig 1 éve előfizetőként, és 18 évig 2 vagy több éve előfizetőként. Összesen tehát várhatóan 1 + .80 + 18 = 19.80 évig fizet elő.

3. Elnyelő Markov-láncunk

$$\begin{array}{l|cccccc} & \text{0-5} & \text{>5} & \text{elpusztul} & \text{\$20-ért} & \text{\$30-ért} & \text{\$50-ért} \\ 0-5 & .3 & .2 & .4 & .1 & 0 & 0 \\ >5 & 0 & .3 & 0 & 0 & .2 & .5 \\ elpusztul & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20\$-ért & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30\$-ért & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 50\$-ért & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3a. A 0-5 láb állapotból az “elpusztul” elnyelő állapotba kerülés valószínűségét keressük.

$$Q = \begin{bmatrix} .3 & .2 \\ 0 & .3 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} .4 & .1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .2 & .5 \end{bmatrix}$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} .7 & -.2 \\ 0 & .7 \end{bmatrix} \qquad (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 10/7 & 20/49 \\ 0 & 10/7 \end{bmatrix}$$

$$(I - Q)^{-1} R = \begin{bmatrix} 4/7 & 1/7 & 4/49 & 10/49 \\ 0 & 0 & 2/7 & 5/7 \end{bmatrix}$$

Az $(I - Q)^{-1}$ R mátrix $_{11}$ elemét kerestük = 4/7.

3b. (4/7)0 + (1/7)20 + (4/49)30 + (10/49)50 = $15.51

4. NH = még nem hívott ügyfél állapot, LI = lanyha érdeklődés, HI = komoly érdeklődés, S = megveszi, D = törlik. Ezen állapotokkal az elnyelő Markov-láncunk:

$$\begin{array}{l|ccccc|} & \text{NH} & \text{LI} & \text{HI} & \text{S} & \text{D} \\ NH & 0 & .6 & .3 & 0 & .1 \\ LI & 0 & .3 & .2 & .3 & .2 \\ HI & 0 & .1 & .4 & .5 & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & .6 & .3 \\ 0 & .3 & .2 \\ 0 & .1 & .4 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & .1 \\ .3 & .2 \\ .5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -.6 & -.3 \\ 0 & .7 & -.2 \\ 0 & .1 & .6 \end{bmatrix}$$

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & .975 & .825 \\ 0 & 1.5 & .5 \\ 0 & .25 & 1.75 \end{bmatrix}$$

$$(I - Q)^{-1} R = \begin{bmatrix} .705 & .295 \\ .7 & .3 \\ .95 & .05 \end{bmatrix}$$

4a. $(I - Q)^{-1}R$ mátrix $_{11}$ elemét kerestük = .705.

4b. $(I - Q)^{-1}R$ mátrix $_{22}$ elemét kerestük = .3.

4c. $(I - Q)^{-1}$ első sorában lévő elemek összege = 1 + .975 + .825 = 2.8-szor.

5.

$$Q = \begin{array}{lccc} & \$1 & \$2 & \$3 \\ \$1 & 0 & .6 & 0 \\ \$2 & .4 & 0 & .6 \\ \$3 & 0 & .4 & 0 \end{array} \qquad R = \begin{array}{l|cc|} & \$0 & \$4 \\ \$1 & .4 & 0 \\ \$2 & 0 & 0 \\ \$3 & 0 & .6 \end{array}$$

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.462 & 1.154 & .692 \\ .769 & 1.923 & 1.154 \\ .308 & .769 & 1.462 \end{bmatrix}$$

$$(I\text{-}Q)^{-1}\,R = \begin{array}{cc} \$0 & \$4 \\ \hline 0.58 & 0.42 \\ 0.31 & 0.69 \\ 0.12 & 0.88 \end{array}$$

5a. Ha \$2-ral kezdünk, akkor \$4 elérésének valószínűsége
$[(I - Q)^{-1}R]_{22} = .69$,

5b. a másik elnyelő állapot elérésének valószínűsége ennek komplementere,
$\{(I - Q)^{-1}R\}_{21} = .31$

5c. Ha \$2-ról indulunk, akkor
várhatóan $(I - Q)^{-1}{}_{21} = .769$ periódusban lesz \$1-unk,
várhatóan $(I - Q)^{-1}{}_{22} = 1.923$ periódusban lesz \$2-unk,
várhatóan $(I - Q)^{-1}{}_{23} = 1.154$ periódusban lesz \$3-unk.
Így átlagosan .769 + 1.923 - 1 + 1.154 = 2.846 –szer játszva továbbjátszó állapotokba jutunk, végül 1 játszmával kilépünk. Így várhatóan összesen 3.846 –szer játszunk.

6. GRP nélkül

$$Q = \begin{matrix} .991 & .003 \\ .025 & .969 \end{matrix} \qquad I - Q = \begin{bmatrix} .009 & -.003 \\ -.025 & .031 \end{bmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 152 & 15 \\ 123 & 44 \end{bmatrix} \text{kerekítve.}$$

A beteg kórházban kezd.
GRP nélkül várhatóan
kórházban tölt $(I\text{-}Q)^{-1}{}_{11}=152$ hónapot,
otthon tölt $(I\text{-}Q)^{-1}{}_{12}=15$ hónapot.
Így a várható költség betegenként = 655(152)+226(15)=\$102,950.

GRP-vel

$$Q = \begin{bmatrix} .854 & .028 & .112 & 0 \\ .013 & .978 & 0 & .003 \\ .025 & 0 & .969 & 0 \\ 0 & .025 & 0 & .969 \end{bmatrix}$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} .146 & -.028 & -.112 & 0 \\ -.013 & .022 & 0 & -.003 \\ -.025 & 0 & .031 & 0 \\ 0 & -.025 & 0 & .031 \end{bmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 39 & 97 & 4 \\ 18 & 77 & 65 & 7 \\ 22 & 31 & 111 & 3 \\ 14 & 62 & 52 & 38 \end{bmatrix} \text{kerekítve.}$$

A beteg kórházban kezd (2. sor).
GRP-vel várhatóan
GRP kezeléssel tölt 18 hónapot,
kórházban tölt 77 hónapot,
otthon tölt összesen 65 + 7 = 72 hónapot.
Így GRP-vel a várható költség betegenként = 680(18) + 655(77) + 226(72) = \$78,947.
Így a GRP megtakarítást jelent az államnak (plusz a beteg életminősége is javul: kevesebb időt tölt kórházban, több időt otthon.

6b. GRP nélkül várhatóan 152 hónapot tölt egy beteg kórházban; GRP-vel 77 hónapot.

7.

$$P = \begin{array}{l|ccccc} & \text{új} & \text{1 éves} & \text{2 éves} & \text{cserélt} & \text{garanciaidőn túli} \\ \hline \text{új} & 0 & .97 & 0 & .03 & 0 \\ \text{1 éves} & 0 & 0 & .95 & .05 & 0 \\ \text{2 éves} & 0 & 0 & 0 & .07 & .93 \\ \text{cserélt} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{gar. túli} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & .97 & 0 \\ 0 & 0 & .95 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -.97 & 0 \\ 0 & 1 & -.95 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .07 & .93 \end{bmatrix} \qquad (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & .97 & .92 \\ 0 & 1 & .95 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7a. $\{(I - Q)^{-1}R\}_{11} = .143$

7b.

$$P = \begin{array}{l|cccc} & \text{új} & \text{1 éves} & \text{cserélt} & \text{gar. túli} \\ \hline új & 0 & .97 & .03 & 0 \\ 1éves & 0 & 0 & .05 & .95 \\ cserélt & 0 & 0 & 1 & 0 \\ gar.túli & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & .97 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -.97 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} .03 & 0 \\ .05 & .95 \end{bmatrix}$$

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & .97 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{(I - Q)^{-1}R\}_{11} = .0785$

Így a várható cserék költsége évente 3 év garancia esetén
= 500(10,000).143 = $715,000
A várható cserék költsége évente 2 év garancia esetén
= 500(10,000)(.0785) = $392,500
Így a megtakarítás $322,500/év.

8. $(I - Q)(I + Q + Q^2 + ...) = I + Q + Q^2 + Q^3 + ...$

$$- Q - Q^2 - Q^3 - ...$$

$$= I$$

A két szélső tag, I és Q^∞ kivételével a többi tag kiesik, nagy n –ek esetén pedig Q^n minden eleme 0-hoz tart, hiszen a tranziens állapotok valószínűsége folyamatosan olvad, átfolyik az elnyelő állapotokba.

8b. Mindegyik (k.) lépést követően az egyik állapotban leszünk, mégpedig a j. állapotban $P_{ij}(n)$ valószínűséggel (kezdetben i-ből indulva). Mindegyik lépésben 1 valószínűséget osztunk szét az állapotok között, az állapotra jutó $P_{ij}(n)$ valószínűséggel nő eggyel (ennek a lépésnek az egy periódusával), azaz várható értékben $P_{ij}(n)$ periódussal a j. állapotban töltött idő. E valószínűségek összegzése azonos a várhatóan a j. állapotban töltött periódusok számával (k=1-től n-ig is, de egyébként bármely időtartományban is). Az összes állapotra igaz ugyanez, mindegy, hogy tranziens vagy elnyelő. (Az ebben a feladatban m_{ij} –vel jelölt fogalomnak semmi köze a könyvben m_{ij} –vel jelölt fogalomhoz, az átlagos első elérési időhöz, ne keverjük őket, inkább jelöljük a feladatbeli fogalmat máshogy, pl. g_{ij} –vel.)

8c. A b. pontban feltettük, hogy a t_i állapotból indulunk, ennek 1 a "valószínűsége", az (i≠j) állapotokból indulásnak pedig 0. Ezt az egyszerű tényt egységmátrixszal is ki lehet fejezni; azért tekintjük így, mert a d.-ben használni fogjuk.

Teljes indukcióval bizonyítunk. n = 1 –re világos, hogy igaz. Ha n - 1 –re igaz, igazolandó, hogy n –re is igaz marad. n lépés után a j. állapotba úgy kerülhettünk, hogy n-1. lépés után adott $P^{n-1}{}_{ik}$ valószínűségekkel voltunk a különböző (k.) állapotokban és ezekből egyenként P_{kj} valószínűséggel kerültünk az n. lépésre a j. állapotba. $Q_{kj}=P_{kj}$, csak tekintés kérdése, hogy feldaraboljuk-e P_{kj} –t gondolatban részekre. $Q^{n-1}{}_{ik} = P^{n-1}{}_{ik}$ már nem magától értetődő, de gondoljuk meg, hogy amikor P-t (benne Q-t) P-vel szorozzuk, akkor az első s-m sor és az első s-m oszlop szorzata, vagyis a Q helyére kerülő elemek úgy jönnek ki, hogy (Q és mellette R -et) szorozzuk Q és alatta egy nullmátrix oszlopaival, ami a nullmátrix miatt Q Q –t ad, tehát $Q^l{}_{ik} = P^l{}_{ik}$ bármely hatványra. PP =

$$\left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Q^2 & QR+R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

8d. Felhasználjuk (összefoglaljuk) a 8a., 8b. és 8c. pontok eredményeit. A 8b. pontban kapott egyenlőségbe behelyettesítjük a valószínűségeket a 8c. pontban belátott alakban:
g_{ij} = I-nek az ij –edik eleme + Q-nak az ij –edik eleme + Q^2-nek az ij –edik eleme + ... , ami a 8a. szerint = $(I - Q)^{-1}$ ij –edik eleme.

9a. r_{ij} valószínűséggel az első lépésben kerülünk t_i -ből a_j állapotba. Ezenkívül úgy van esélyünk végül az a_j állapotba jutni, hogy az első lépésben valamelyik (a k., k=1, 2, …, s-m) tranziens állapotba jutunk (q_{ik} valószínűséggel), és innen definíció szerint b_{kj} valószínűséggel jutunk végül az a_j elnyelő állapotba.

9b. Mert az előző pontban nézett $\sum_k q_{ik}b_{kj}$ jelenti QB ij-edik elemét.

9c. Az előző pontban belátott B=R+QB egyenletben rendezzük egy oldalra a B –s tagokat mindkét oldalból kivonva QB –t: (I - Q)B = R.
B (bal oldali) szorzótényezőjét pedig úgy tüntetjük el, hogy inverzével (balról) szorozunk: $B = (I - Q)^{-1}R$

10. Tegyük fel, hogy a lehetséges bázismegoldások célfüggvényértékei nem egyenlőek, hanem egyértelmű sorba rendezhetőek. Legyen az (i) állapot az, hogy hanyadik legjobb bázismegoldásban vagyunk. Az átlagos első elérési időt (lépésszámot) keressük az 5. állapotból az 1. állapotba. Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ez egy elnyelő Markov-lánc, az 1-es állapot elnyelő, a többi tranziens.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 5-ös állapotból indulva (legfelső sor) az elnyelés előtt 1 periódust töltünk az 5-ös állapotban, átlagosan ¼ periódust a 4-es állapotban, 1/3-ot a 3-asban, ½-et a 2-esben, tehát átlagosan 1 + (1/4) + (1/3) + (1/2) = 2.08 báziscserére van szükség az optimum eléréséhez.

11. A pénzeloszlás változását az alábbi elnyelő Markov-lánc írja:

$$\begin{array}{l|ccccc} & \text{Könyvelés} & \text{Szervezés} & \text{Div 1} & \text{Div 2} & \text{Div 3} \\ \hline \textit{Könyvelés} & .1 & .3 & .2 & .2 & .2 \\ \textit{Szervezés} & .3 & .2 & .3 & 0 & .2 \\ \textit{Div1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \textit{Div2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \textit{Div3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Q=\begin{bmatrix} .1 & .3 \\ .3 & .2 \end{bmatrix} \qquad I-Q=\begin{bmatrix} .9 & -.3 \\ -.3 & .8 \end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix} .2 & .2 & .2 \\ .3 & 0 & .2 \end{bmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 80/63 & 10/21 \\ 10/21 & 10/7 \end{bmatrix} \qquad (I-Q)^{-1}R=\begin{bmatrix} 25/63 & 16/63 & 22/63 \\ 11/21 & 2/21 & 8/21 \end{bmatrix}$$

Így a Könyvelés és Szervezés költségeinek szétosztása a divíziók között:

$$\begin{array}{l|ccc} & \text{Divízió 1} & \text{Divízió 2} & \text{Divízió 3} \\ \hline \textit{Könyvelés} & .397 & .254 & .349 \\ \textit{Szervezés} & .524 & .095 & .381 \end{array}$$

12a. $(I-Q)^{-1}$ első sorának (mert új vevő állapotából indulunk) elemeit kell összeadnunk (mielőtt elnyelődne, átlagosan hány periódust tölt a rendszer az egyes tranziens állapotokban): 1 + .55 + .66 + .63 = 2.84 hívás. Lásd P_17_6_16.xls.

12b. $(I-Q)^{-1}R_{11}$-edik eleme a válasz (.35)

12c. $(I-Q)^{-1}R_{21}$-edik eleme a válasz (.26)

12d. Egy vevőn típusától függően a nyereség = 190*(annak valószínűsége, hogy végül vásárol) - 15*(a hívások várható száma). Táblázatkezelővel kiszámoltuk ezen értékeket, sorrendjük: komolyan érdeklődő, közepesen érdeklődő, új vevő, lanyhán érdeklődő.

13. Ha 6 katalógusból nem rendelés után törlik az ügyfelet a levelezési listáról, akkor a valószínűségátmenet mátrix

$$\begin{array}{l|cccccccc} & \text{új} & \text{legutóbb} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \text{törölt} \\ \hline \textit{új} & 0 & .06 & .94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textit{legutóbb} & 0 & .20 & .80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & .16 & 0 & .84 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & .12 & 0 & 0 & .88 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & .08 & 0 & 0 & 0 & .92 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & .04 & 0 & 0 & 0 & 0 & .96 & 0 \\ 5 & 0 & .02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .98 \\ \textit{törölt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ha 4 katalógusból nem rendelés után törlik az ügyfelet a levelezési listáról, akkor a valószínűségátmenet mátrix

$$\begin{array}{l|cccccc}
 & \text{új} & \text{legutóbb} & 1 & 2 & 3 & \text{törölt} \\
\hline
\textit{új} & 0 & .06 & .94 & 0 & 0 & 0 \\
\textit{legutóbb} & 0 & .20 & .80 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & .16 & 0 & .84 & 0 & 0 \\
2 & 0 & .12 & 0 & 0 & .88 & 0 \\
3 & 0 & .08 & 0 & 0 & 0 & .92 \\
\textit{törölt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Mindegyik stratégia esetén $(I-Q)^{-1}$ első sorában lévő elemek összege adja a kiküldött katalógusok várható számát; $(I-Q)^{-1}$ első sorában a második oszlopban lévő elem adja a rendelés valószínűségét. A táblázatkezelővel kiszámolt eredmény:
6 elmulasztott rendelés utáni törlés esetén
a kiküldött katalógusok száma átlagosan = 7.89
a rendelés valószínűsége = .78
várható nyereség ügyfelenként = 15*.78 - 7.89 = $3.81

4 elmulasztott rendelés utáni törlés esetén
a kiküldött katalógusok száma átlagosan = 5.46
a rendelés valószínűsége = .66
várható nyereség ügyfelenként = 15*.66 - 5.46 = $4.44
Érdemesebb 4 elmulasztott rendelés utáni törölni az ügyfelet.

17.7. alfejezet megoldásai

1. Az egyensúlyi népességszám egyenletek:
hányan válnak i. évessé = hányan válnak nem i. évessé

$7{,}000 = (.8+.1)N_1$
$500+.8N_1 = (.85+.05)N_2$
$500+.85N_2 = (.80+.05)N_3$
$0 +.80N_3 = (.05+.85)N_4$

Megoldva N_1 = 7777.78, N_2 =7469.14, N_3 = 8057.37, N_4 = 7162.10. Így a harmadévesek lesznek a legtöbben.

2. Ez a harmadik egyensúlyi népességszám egyenletet változtatja meg $.03N_2 = .03N_3$ –re. Amiből $N_2 = N_3$, vagyis minden dolgozó felnőttre egy nyugdíjas jut, egyet kell eltartania, vagyis évente $5,000 –t kell fizetnie.

3. Jelölje egyensúlyi állapotban a szennyezettséget (tonnában) New Yorkban NY, Newarkban NE, Jersey City-ben J. A bekerülő és kimenő szennyezésfolyam egyenletek:
$1000 + J/3 = 2NY/3$
$50 + NY/3 + J/3 = 2NE/3$
$100 + 2NE/3 = 2J/3$
Megoldva az egyenletrendszert NY = 3450, J = 3900, NE = 3750.

4. M = a rendszerbe pumpált pénz mennyisége havonta
V = egyensúlyban a forgalomban lévő pénzmennyiség a Vulcan bolygón,
R = egyensúlyban a forgalomban lévő pénzmennyiség a Romulanville-en,
K = egyensúlyban a forgalomban lévő pénzmennyiség a Klingonville-en.

$$M + R/3 = 2V/3$$
$$2K/3 = 2R/3$$
$$V/3 + R/3 = 2K/3$$

A megoldás V = R = K = 5 és M = 5/3 kielégíti a feltételeket.

5.	nem véglegesített	véglegesített	elhagyja
nem véglegesített	0.8	.10	.10
véglegesített	0	.95	.05

Jelölje H_U = a felvett nem véglegesített tanárok számát évente és H_T = a felvett véglegesített tanárok számát évente. H_U és H_T ki kell elégítse:
$H_U = (.20)x$
$H_T + .10x = (.05)(100 - x)$
Megoldva ezt az egyenletrendszert $H_U = .20x$ és $H_T = 5 - .15x$.
Véglegesített tanár elküldése pontosan akkor szükséges, ha H_T negatív, vagyis ha $5 < .15x$, azaz ha $x > 100/3 = 33.33$.
Ha x=10, akkor $H_U=.20(10)=2$ és $H_T=5-.15(10)=3.5$
Ha x=40, akkor $H_U=.20(4)=8$ és $H_T=5-.15(40)=-1$, ami azt jelenti, hogy évente 1 véglegesített tanárt kell elküldeni.

6a. Senki nem hal meg, de minden évben eggyel többen lesznek, vagyis végtelenbe nő a népességszám.
6b. Jelölje A a felnőttek egyensúlyi népességszámát és C a gyerekek egyensúlyi népességszámát.
(1) $1 + .10A = .10C$
(2) $.10C = .10A$
(2) miatt A = C, de akkor (1) nem teljesül!

7a. Az 1. politika közelíti meg jobban a FIFO-t, mert itt a régebbi vérnek nagyobb az esélye, hogy felhasználják vérátömlesztésre. A 2. politika közelíti meg jobban a LIFO-t, mert itt a régebbi vérnek nagyobb az esélye, hogy felhasználják vérátömlesztésre.

Legyen Nt = egyensúlyban a t napos vér mennyisége a nap elején a napi vérszállítmány megérkezése után az 1. politika esetén; Nt' = egyensúlyban a t napos vér mennyisége a nap elején a napi vérszállítmány megérkezése után a 2. politika esetén.
N0 = 100, .9N0 = N1, .8N1 = N2, .7N2 = N3, .6N3 = N4 és
N0' = 100, N1' = .5N0', N2' = .6N1', N3' = .7N2', N4' = .8N3'.
Megoldás: N0 = 100, N1 = 90, N2 = 72, N3 = 50.4, N4 = 30.24,
N0' = 100, N1' = 50, N2' = 30, N3' = 21, N4' = 16.8.

7b. Az 1. politika esetén (1-.5)N4 = 15.12 üvegnyi romlik meg naponta (az érkező 100 üvegnek ez ugyanennyi %-a).
A 2. politika esetén (1 - .1)N4' = 15.12 üvegnyi romlik meg naponta.

7c. Az 1. politika esetén az átlagos készletszint N0 + N1 + N2 + N3 + N4 = 342.64 üveg; a 2. politika esetén az átlagos készletszint N0' + N1' + N2' + N3' + N4' = 217.8 üveg. Így a 2. politika esetén kisebb a készletszint.

7d. Az 1. politika esetén az átömlesztett vér átlagos kora

$$\frac{.2(N1) + .3(2N2) + .4(3N3) + .5(4N4)}{84.88} = 2.15 \text{ nap;}$$

a 2. politika esetén az átömlesztett vér átlagos kora

$$\frac{.4(N1') + .3(2N2') + .2(3N3') + .1(4N4')}{84.88} = 1.03 \text{ nap.}$$

7e. Így a LIFO politika esetén átlagosan frissebb az átömlesztett vér. A megromlási arány ugyanaz. LIFO politika esetén átlagosan kisebb a készletszint, emiatt nagyobb a hiány előfordulásának valószínűsége.

8a. Legyen A = egyensúlyban az A eladó által eladott mennyiség hetente, B = egyensúlyban a B eladó által eladott mennyiség hetente, C = egyensúlyban a C eladó által eladott mennyiség hetente.

$$\frac{A}{A+B}(p_C C) + \frac{A}{A+C}(p_B B) = p_A A$$

$$\frac{B}{B+C}(p_A A) + \frac{B}{A+B}(p_C C) = p_B B$$

$$\frac{C}{C+A}(p_B B) + \frac{C}{C+B}(p_A A) = p_C C$$

$$A+B+C=1,000,000$$

Az első három egyenlet bármelyike felesleges. Megoldás:

$$A = \frac{1,000,000(p_B+p_C-p_A)}{(p_A+p_B+p_C)}$$

$$B = \frac{1,000,000(p_A+p_C-p_B)}{(p_A+p_B+p_C)}$$

$$C = \frac{1,000,000(p_B+p_A-p_C)}{(p_A+p_B+p_C)}$$

8b. Jelenleg A piaci részesedése (.15+.20-.10)/(.10+.15+.20) = 55.6%. Ha a nem megfelelő minőségű gyümölcslé arányát a felére csökkenti, p_A = .05 és A piaci részesedése (.15+.20-.05)/(.05+.15+.20)= .75. A minőségjavulással a nyereség évente $10,088,000= 52($10,000)(75-55.6)>$1,000,000 –ral nő, tehát megéri megtennie.

17. fejezet áttekintő feladatok megoldásai

1. Jelölje π_G egyensúlyban annak valószínűségét, hogy jó állapotban van és π_B hogy rossz. Az átmenetvalószínűség mátrix

	jó	rossz
jó	.9	.1
rossz	.2	.8

A megoldandó egyenletrendszer $\pi_G = .9\pi_G + .2\pi_B$ és $\pi_G + \pi_B = 1$. Innen $\pi_G = 2/3$ és $\pi_B = 1/3$. Átlagosan 2/3(100) + 1/3(60) = 260/3 eszközt gyártanak vele naponta.

2a. Az alábbi átmenet utakkal valósítható meg, hogy 1. típusú autóból indulva a következő két autó közül legalább az egyik 1. típusú legyen:

jelenlegi	következő	köv. utáni	az út valószínűsége
1. típusú	1. típusú	1. típusú	(.80)(.80) = .64
1. típusú	1. típusú	2. típusú	(.80)(.10) = .08
1. típusú	1. típusú	3. típusú	(.80)(.10) = .08
1. típusú	2. típusú	1. típusú	(.10)(.05) = .005
1. típusú	3. típusú	1. típusú	(.10)(.10) = .01

Összegük a válasz: .815.

2b. Jelölje π_i az i. típusú autó vásárlásának valószínűségét egyensúlyban.
Garancia nélkül
$\pi_1 = .8\pi_1 + .05\pi_2 + .1\pi_3$
$\pi_2 = .10\pi_1 + \pi_2 + .20\pi_3$
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$
Megoldás: $\pi_1 = 1/4$, $\pi_2 = 1/2$, $\pi_3 = 1/4$. Jelölje N az évente összesen eladott autók számát. Autónként a nyereség \$8000 - \$5000 = \$3000. Az 1. vállalat várható éves nyeresége 3000(1/4)N = \$750N.
Garancia esetén
$\pi_1 = .85\pi_1 + .10\pi_2 + .15\pi_3$
$\pi_2 = .10\pi_1 + .80\pi_2 + .10\pi_3$
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$
Ezekből $\pi_1 = 4/9$, $\pi_2 = 3/9$, $\pi_3 = 2/9$. Autónként a nyereség ekkor csak \$2700. Az 1. vállalat várható éves nyeresége = 2700N (4/9) = \$1200N.
Vagyis érdemes bevezetni a garanciát.

3. Mindegyik kategóriából indulva meg kell határoznunk a várhatóan sztárként, kezdőjátékosként, tartalékként a csapatnál töltött szezonok várható számát.

$$Q = \begin{bmatrix} .50 & .30 & .15 \\ .20 & .50 & .20 \\ .05 & .15 & .50 \end{bmatrix} \qquad I - Q = \begin{bmatrix} .50 & -.30 & -.15 \\ -.20 & .50 & -.20 \\ -.05 & -.15 & .50 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{matrix} .05 \\ .10 \\ .30 \end{matrix} \qquad (I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 3.2 & 2.509 & 1.964 \\ 1.6 & 3.527 & 1.891 \\ .80 & 1.309 & 2.764 \end{bmatrix}$$

Így a csapatnál töltött ideje alatt egy sztár még várhatóan 3.2(1,000,000) + 2.509(400,000) + 1.964(100,000) = \$4,400,000 –t fog keresni;
egy kezdőjátékos 1.600(1,000,000) + 3.527(400,000) + 1.891(100,000) =

\$3,199,900 -t;
egy tartalék .80(1,000,000) + 1.309(400,000) + 2.764(100,000) = \$1,600,000 -t.
Így a csapat játékosainak összértéke 2(4,400,000) + 13(3,199,900) + 10(1,600,000 = \$66,398,700.

4a. Jelölje N_i az addig i-szer használt könyv eladási példányszámát. $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = 5,000,000$.
Mivel egyensúlyban a már i>1 -szer használt könyvekből a bolt annyit ad el, mint amennyit vesz: $N_1 = .9N_0$, $N_2 = .80N_1$, $N_3 = .60N_2$.
Az egyenletrendszer megoldása $N_0 = 1,638,270$, $N_1 = 1,474,443$, $N_2 = 1,179,554$, $N_3 = 707,733$.
Így egyensúlyban évente $N_0 = 1,638,270$ új könyvet adnak el.

4b. 6(1,638,270) + 3(1,474,443) + 2(1,179,554) + 1(707,733) = \$17,319,790

5. Az átmenetvalószínűség mátrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & C \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} .80 & .20 \\ .10 & .90 \end{bmatrix} \end{array}$$

Egyensúlyban $\pi_H = .8\pi_H + .1\pi_C$ és $\pi_H + \pi_C = 1$. Megoldva $\pi_H = 1/3$ és $\pi_C = 2/3$.

5a. A Hearts nyeresége dobozonként 20 cent. A piac éves forgalma 12(40,000,000) = 480,000,000 doboz, ennek $\pi_H = 1/3$ -a a Hearts forgalma, nyeresége tehát (\$.20)(160,000,000) = \$32,000,000 évente.

5b. Az x %-os árcsökkentés után az átmenetvalószínűség mátrix

$$\begin{array}{ccc} & H & C \\ H & .8 + x/100 & .2 - x/100 \\ C & .1 & .9 \end{array}$$

Az egyensúlyi valószínűségek egyenletrendszere:
$\pi_H = \pi_H(.8 + x/100) + .1\pi_C$ és $\pi_H + \pi_C = 1$. Megoldva

$$\pi_C = \frac{.2 - x/100}{.3 - x/100} \text{ és } \pi_H = \frac{.1}{.3 - x/100}$$

Ekkor a Hearts éves várható nyeresége

$$480,000,000\left(\frac{.1}{.3 - x/100}\right)(.2 - x/100)$$

Ez azon x esetén maximális, ahol

$$f(x) = \frac{.2 - x/100}{.3 - x/100} \text{ maximális.}$$

$$f'(x) = \frac{-\,1/100}{(.3 - x/100)^2} < 0 .$$

Így x = 0 maximalizálja a várható nyereséget, vagyis nem érdemes árengedményt adni.

9a. Az állapot a záró=nyitókészletszint, mégpedig itt a rendelkezésre álló készletszint záró=nyitóértéke, mert elvész a kielégítetlen kereslet. A záró=nyitókészletszint 0, 1, 2, vagy 3 lehet (4 nem lehet, mert legfeljebb 4-re töltik fel a készletet rendeléssel, és legalább 1 kereslet mindig van).

Az átmenetvalószínűség mátrix:

P(következő nyitókészlet | előző nyitókészlet) mátrix:

előző nyitókészlet \ következő nyitókészlet	0	1	2	3
0	0	0.33	0.33	0.33
1	0	0.33	0.33	0.33
2	0.67	0.33	0	0
3	0.33	0.33	0.33	0

Vegyük észre, hogy ha 2 nyitókészlettel indulunk (->nem rendelünk), akkor ha a kereslet 3 lenne, akkor is csak 2 darabot adunk el, 1 darabnyi kereslet elvész, a záró=nyitókészlet 0 lesz (nem -1). Az egyensúlyi állapot valószínűségek:

$\pi_0 = .229$, $\pi_1 = .333$, $\pi_2 = .250$, $\pi_3 = .1875$.

9b. Periódusonként a várható rendelési költség = \$5($\pi_0 + \pi_1$) = \$2.81
= \$2($\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3$) = \$2.79
Periódusonként a várható hiányköltség = (\$3)(1/3)π_2 = \$0.25
Periódusonként a várható beszerzési költség = (\$0.50)($4\pi_0 + 3\pi_1$) = \$0.96
Periódusonként a várható összköltség = \$6.81

9c. Ha a kereslet késve is kielégíthető, akkor ha 2 darabos nyitókészlet periódusában 3 a kereslet (1/3 valószínűséggel), akkor a következő periódusban -1 a nettó nyitókészletszint. -1 is lehetséges állapottá vált és az állapot a nettó nyitókészletszint. Az átmenetvalószínűség mátrix

$$\begin{array}{c|cccccc|} & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}$$

Továbbra sem lehet 4 a nyitókészlet ($\pi_4 = 0$).
Az egyensúlyi valószínűségek egyenletrendszerének megoldása:
$\pi_{-1} = .083$, $\pi_0 = .146$, $\pi_1 = .333$, $\pi_2 = .250$, $\pi_3 = .1875$. (Csak a korábbi π_0 bomlott ketté, π_{-1} -re és π_0 –ra.)
Periódusonként a várható rendelési költség = 5($\pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1$) = \$2.81
Periódusonként a várható raktározási költség=2($\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3$) = \$2.79
Periódusonként a várható hiányköltség = \$3π_{-1} =(\$3)(1/3)π_2 = \$0.25
Periódusonként a várható beszerzési költség=(\$0.50)($5_{\pi-1} + 4\pi_0 + 3\pi_1$)=\$1.00
Periódusonként a várható összköltség = \$6.85, ami nagyobb mint az elvesző kereslet esetében. Ez a valóságban ritkán előforduló eredmény azért alakult ki, mert az egységnyi hiányköltséget nem növeltük meg az elvesző kereslet esetében, pedig az árréssel növelni kellene. Csak a várható beszerzési költség változott, π_{-1}= .083 –szor \$0.50 –ral, illetve az összköltség ugyanennyivel.

7. $$Q=\begin{bmatrix} .50 & .30 & .15 \\ .20 & .50 & .20 \\ .05 & .15 & .50 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy az $I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots = (I - Q)^{-1}$ ij-edik eleme jelenti azt, hogy a most i kategóriájú játékos várhatóan hány szezont tölt majd el j kategóriájú játékosként mielőtt visszavonul. Így aki most sztár, átlagosan
$1{,}000{,}000(I + Q + Q^2 + \ldots)_{11} + 400{,}000(I + Q + Q^2 + \ldots)_{12}$
$+ 100{,}000(I + Q + Q^2 + \ldots)_{13}$ dollárt fog még keresni nominálisan.
E kereseteket diszkontálva: aki most sztár, átlagosan
$1{,}000{,}000(I + .9Q + (.9)^2Q^2 + \ldots)_{11}$
$+ 400{,}000(I + .9Q + (.9)^2Q^2 + \ldots)_{12}$
$+ 100{,}000(I + .9Q + (.9)^2Q^2 + \ldots)_{13}.$
$= 1{,}000{,}000(I - .9Q)^{-1}{}_{11} + 400{,}000(I - .9Q)^{-1}{}_{12}$
$+ 100{,}000(I - .9Q)^{-1}{}_{13}$ mai dollárt fog még keresni jelenértékben.
Így $(I - .9Q)^{-1}$ –t kell meghatározni:

$$.9Q=\begin{bmatrix} .45 & .27 & .135 \\ .18 & .45 & .18 \\ .045 & .135 & .45 \end{bmatrix} \qquad I-.9Q=\begin{bmatrix} .55 & -.27 & -.135 \\ -.18 & .55 & -.180 \\ -.045 & -.135 & .55 \end{bmatrix}$$

$$(I-.9Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 2.368 & 1.419 & 1.046 \\ .912 & 2.523 & 1.050 \\ .418 & .735 & 2.161 \end{bmatrix}$$

Így (jelenértékben) egy sztár
1,000,000(2.368) + 400,000(1.419) + 100,000(1.046) = \$3,040,200 –t fog még keresni.
Hasonlóan számoljuk ki a más kategóriába tartozó játékosok értékét is.

8. Az állapot a hónap eleji készpénzállomány átrendezés előtt.
Az 1. stratégia esetén az átmenetvalószínűség mátrix:

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1000 & 2000 & 3000 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1000 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2000 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3000 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$

Az egyensúlyi állapot egyenletrendszer:
$\pi_0 = .5\pi_0 + .5\pi_1 + .5\pi_3$
$\pi_1 = .5\pi_2$
$\pi_3 = .5\pi_2$
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$

Megoldás: $\pi_0 = \pi_2 = 1/3$, $\pi_1 = \pi_3 = 1/6$.
A várható költség havonta = $(\pi_3 + \pi_0)20 + 15\pi_1 + 30\pi_2 + 45\pi_3 = \$30$.

A 2. stratégia esetén az átmenetvalószínűség mátrix:

	0	1000	2000	3000	4000
0	0	1/2	0	1/2	0
1000	1/2	0	1/2	0	0
2000	0	1/2	0	1/2	0
3000	0	0	1/2	0	1/2
4000	0	1/2	0	1/2	0

Az egyensúlyi állapot egyenletrendszer:
$\pi_0 = .5\pi_1$
$\pi_1 = .5\pi_4 + .5\pi_2 + .5\pi_0$
$\pi_2 = .5\pi_3 + .5\pi_1$
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$

Megoldás: $\pi_4 = \pi_0 = 1/8$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/4$.
A várható költség havonta = $(\pi_0 + \pi_4)20 + 15\pi_1 + 30\pi_2 + 45\pi_3 + 60\pi_4 = \$35$.
A várható költség az 1. stratégia esetén kisebb.

9. Kétféle úton nyerhetünk:
A. Ha elsőre az összeg 7 vagy 11. Ennek valószínűsége 6/36 + 2/36 = 8/36
B. Ha elsőre az összeg 4, 5, 6, 8, 9 vagy 10, és aztán (a folytatásban) előbb dobunk annyit mint elsőre, mint hogy 7-et dobnánk. Jelölje i/36 annak valószínűségét, hogy a folytatás egy menetében nyerünk; 6/36 valószínűséggel vesztünk (dobunk 7 összegűt); (30-i)/36 valószínűséggel folytatjuk a dobásokat.
A folyamatot az alábbi elnyelő Markov-lánc írja le:

	folytatás	nyerés	vesztés
folytatás	(30-i)/36	i/36	6/36
nyerés	0	1	0
vesztés	0	0	1

Egy tranziens állapot van, a folytatás, két elnyelő állapot.
Itt Q = [(30-i)/36], R = [i/36 6/36], I - Q = [(6+i)/36],
$(I - Q)^{-1} = [36/(6+i)]$, és $(I - Q)^{-1}R = [i/(6+i) \quad 6/(6+i)]$.
Vagyis i/(6+i) valószínűséggel nyelődik el a folyamat a nyerés állapotában.
i=3 variációban lehet 4 összegűt dobni (1+3, 2+2, 3+1);
i=4 variációban lehet 5 összegűt dobni (1+4, 2+3, 3+2, 4+1);
i=5 variációban lehet 6 összegűt dobni (1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1);
i=5 variációban lehet 8 összegűt dobni (2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2);
i=4 variációban lehet 9 összegűt dobni (3+6, 4+5, 5+4, 6+3);
i=3 variációban lehet 10 összegűt dobni (4+6, 5+5, 6+4).

Így a B. úton nyerés valószínűsége
(3/36)(3/9) + (4/36)(4/10) + (5/36)(5/11) + (5/36)(5/9) + (4/36)(4/10) + (3/36)(3/11) = .271
ahol pl. az első tag =(annak valószínűsége, hogy elsőre 4 volt a dobás összege)(ha elsőre 4 volt a dobás összege, akkor mekkora valószínűséggel nyerünk végül a folytatásban).
Így összességében e játékban 8/36 + .271 = .493 valószínűséggel nyerünk.

10a. Táblázatkezelővel (lásd RP19-10.wk1 file) számoljuk ki $(I-Q)^{-1}$ –et, adjuk össze az első sorában az elemeket: 7.66 + 2.49 + .85 = 11.0 napig marad várhatóan még kórházban.

10b. Kiszámoljuk, hogy másnapi felvétel után a kórházban
jó állapotban lesz várhatóan = 50 + 500(.65) + 300(.50) + 200(.51) = 627 beteg,
elfogadható állapotban = 40 + 500(.20) + 300(.30) + 200(.25) = 280 beteg,
kritikus állapotban = 30 + 500(.05) + 300(.12) + 200(.20) = 131 beteg.

10c. Egyensúlyban G beteg lesz jó állapotban, F elfogadható állapotban, C kritikus állapotban.
$20 + .5F + .51C = .35G$
$10 + .2G + .25C = .70F$
$10 + .05G + .12F = .80C$
Megoldás: G = 289.6 F = 114 C = 47.7

10d. $(I-Q)^{-1}R$ 11-edik eleme = .54

11. Legyen Ni = azon (nyilvántartott) betegek száma, akik legutóbb i évvel ezelőtt voltak a kórházban.
Az 1. stratégia esetén az egyensúlyi népességszám egyenletek:
$10,000+.2N1+.1N2+.05N3+.03N4 = .7N0$
$N1 = .7N0$
$N2 = .8N1$
$N3 = .9N2$
$N4 = .95N3$
Vegyük észre, hogy minden négy éves karton vagy friss beteg kartonná válik, vagy törlik. Megoldás: N0 = 21531 N1 = 15072 N2 = 12058 N3 = 10852 és N4 = 10309. Összesen 69,822 karton.

A 2. stratégia esetén hasonlóan járunk el. (A LINGO Census.lng modellt használjuk.) Egyensúlyban 125,813 kartont tartanak nyilván.