20. fejezet

20.2. alfejezet

1. Amikor az első hely felszabadul, belépünk a kiszolgáló rendszerbe. Az exponenciális eloszlás "memória nélküli" tulajdonsága miatt a bentlévőkhöz képest sem kisebb, sem nagyobb valószínűsége nincs annak, hogy bármelyikük előtt végezzünk. Mivel 1/7 annak az esélye, hogy utolsónak végzünk, ezért annak a valószínűsége, hogy nem mi leszünk az utolsók, 1 -1/7 = 6/7.

2. A tipikus várakozási séma a következő:

```
._______.___________.________________.__________________.
  30 min   1 hour        2 hours           2 hours
```

A különböző hosszúságú időintervallumokban az érkezés valószínűsége:
30/330 = 1/11 a 30 perces szakaszon,
60/330 = 2/11 az 1 órás szakaszon
240/330 = 8/11 a 2 órás szakaszon

A következő busz érkezéséig a várható várakozási idő tehát 1/11[.5(30)] + 2/11[.5(60)] + 8/11[.5(120)] = 555/11 = 50.45 minutes

Megjegyzés: A buszok érkezése közötti idő várható értéke = 1/4(30) + 1/4(60) + 1/2(120) = 82.5 és (1/2)82.5/,= 50.45

3. Egy harmadikos osztály átlagos mérete: 1/4(20 + 25 + 35 + 40) = 30 diák.

Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló az 1. osztályba járjon 20/120 = 1/6, annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló a 2. osztályba járjon 25/120 = 5/24, annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló a 3. osztályba járjon 25/120 = 7/24, végül annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló a 4. osztályba járjon 40/120 = 1/3.

Egy kiválasztott tanuló osztályának átlagos mérete 1/6(20) + 5/24(25) + 7/24(35) + 1/3(40) = 770/24 = 32.08 diák. A második kérdésre adott válasz azért ad nagyobb értéket, mert egy véletlenül kiválasztott hallgató nagyobb eséllyel kerül ki egy nagyobb létszámú osztályból, mint egy kisebb létszámú osztályból.

4a. A következő két órában érkező buszok eloszlása Poisson eloszlás, 2 átlaggal. Így a (7) képlet alapján
P(4 busz érkezik a következő 2 órában) = $e^{-2}(2)^4/4!$ = .09

4b. P(legalább 2 busz érkezik = 1 - P(0 busz) - P(1 busz)
= $1 - e^{-2} - 2e^{-2}$ = .59

4c. P(0 busz) = $e^{-2}(2)^0/0! = e^{-2}$ = .14

4d. A beérkezések közötti idő sűrűsége (órában) e^{-t}. Tehát a keresett mennyiség

$$\int_{1/2}^{3/2} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_{1/2}^{3/2} = e^{-.5} - e^{-1.5} = .38$$

20.3. alfejezet

1. Behelyettesítés után

$$\pi_j = \frac{\lambda_0 \ldots \Pi_{j-1}\ \pi_0}{\mu_1 \ldots \mu_j} = c_j\pi_0$$

a (14) a következő alakot ölti:

$$c_{j-1}\lambda_{j-1}\pi_0 + c_{j+1}\pi_0\mu_{j+1} = c_j\pi_0(\lambda_j + \mu_j)$$

A (16) képletben szereplő π_j értékek tehát akkor elégítik ki a (14)-et, ha

(1) $c_{j-1}\lambda_{j-1} + c_{j+1}\mu_{j+1} = c_jL_j + c_j\mu_j$

Vegyük észre, hogy $c_j = c_{j-1}\lambda_{j-1}\lambda_j/\mu_j\mu_{j+1}$. Az (1)-beli értékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy a (16)-ban szereplő π_j-k akkor elégítik ki (14)-et, ha

$$c_{j-1}\lambda_{j-1} + c_{j-1}\lambda_{j-1}\lambda_j/\mu_j = c_{j-1}\lambda_{j-1}\ (\lambda_j + \mu_j)/\mu_j$$

Mivel ez igaz, ezért a (16)-beli π_j-k kielégítik a (14) összefüggést.

2a. Az állapotok legyenek azonosak a működő égők számával. A lehetséges állapotok tehát 0, 1 és 2. Születés = az égőt kicserélik Halálozás = az égő kiég. Ekkor a születési-halálozási folyamat paraméterei a következők:

$\lambda_0 = 1/2 + 1/2 = 1$ $\mu_0 = 0$
$\lambda_1 = 1/2$ $\mu_1 = 1/22$
$\lambda_2 = 0$ $\mu_2 = 1/22 + 1/22 = 1/11$

A stacionárius valószínűségekre vonatkozó összefüggések:
$\pi_0 = \pi_1/22$, $\pi_1/2 + \pi_1/22 = \pi_0 + \pi_2/11$, $\pi_2/11 = \pi_1/2$,
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$
$\pi_1 = 22\pi_0$, $\pi_2 = 121\pi_0$. Tehát

$\pi_0(1 + 22 + 121) = 1$
$\pi_0 = 1/144$, $\pi_1 = 11/72$, $\pi_2 = 121/144$.

2b. $\pi_2 = 121/144$

2c. $\pi_0 = 1/144$

3a. A pizzériák várható száma 20.47.

3b. Az idő 99.9%-ában több mint 20 pizzéria lesz.

20.4. alfejezet

1. M/M/1 rendszerünk van, ahol $\lambda = 10$ utas/perc, $\mu = 12$ utas/perc és $\rho = 10/12 = 5/6$.

a. $1 - \pi_0 = 5/6$

b. $L_q = \dfrac{p^2}{1-p} = \dfrac{25/36}{1/6} = 25/6$ utas.

c. $L = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{5/6}{1/6}$ 5 utas.

$W = L/\lambda = 5/10 = 1/2$ perc $= 1/120$ óra.

2. A lassúbb másológépre a költség/óra = \$4, $\lambda = 4$ munkatárs/óra, $\mu = 6$ munkatárs/óra.

$W = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = 1/2$ óra

A munkatársak idejének költsége óránként = (4 munkatárs/óra) (1/2 óra) (\$15/munkatársóra) = \$30/óra.
A teljes költség óránként = \$34.

A gyorsabb másológépnél a költség = \$15/óra, $\lambda = 4$ munkatárs/óra és $\mu = 10$ munkatárs/óra.

$W = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = 1/6$ óra.

A munkatársak idejének költsége óránként = (4 munkatárs/óra) (1/6 hr.) (\$15/munkatársóra)= \$10/munkatársóra.
A teljes költség = \$25/óra.

A gyorsabb másológép a jobb.

3. Legyenek λ, μ, L, W és π_j az eredeti rendszer paraméterei és 2λ, 2μ, L', W' és π' az új rendszer paraméterei. Mivel az új rendszerben ρ ugyannyi, mint a régiben, $\pi_j = \pi_j'$ és a stacionárius valószínűségek változatlanok. Mivel $L = \rho/(1-\rho)$, ezért $L = L'$ a sor várható hossza is változatlan. Végül a $W = L/\lambda$ alapjánt $W' = L'/2\lambda = W/2$. A várható várakozási idő az új rendszerben fele a régi rendszer várható várakozási idejének.

4a. $L_q = 40^2/(60-40)60 = 1.33$ vendég.

4b. $W = 1/(60-40) = 1/20$ óra = 3 perc.

4c. $1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3 = 1 - 1/3 - 2/9 - 4/27 - 8/81 = 16/81$.

5. Az eltérő számú ellenőrzési pontok mindegyikére kiszámítjuk a napi költséget. Az első ellenőrzőpont esetében a napi késedelmi költség egyenlő az egy utasra eső késedelmi költség és az egy napra eső utasok számának szorzatával.

$$\frac{\text{Utas}}{\text{Nap}} = (10 \text{ utas/perc } (960 \text{ perc/nap}) = 9600 \text{ utas/nap.}$$

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Utas}} = \$10/\text{utasóra } (1/120 \text{ óra}) = \$1/12/\text{utas}$$

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Utas}} = (9600 \text{ utas/nap } (\$1/12/\text{utas}) = \$800/\text{utas.}$$

$$\frac{\text{Kiszolgálási költség}}{\text{Nap}} = \frac{1{,}000{,}000}{(365)10} = \$274$$

Teljes költség/Nap = \$1,074

Ha 2 ellenőrzőpont van, akkor 2 darab M/M/1 rendszerünk van, ahol mindkettőre $\lambda = 10/2 = 5$ utas/perc és $\mu = 12$ utas/perc. Az egyes ellenőrzőpontok átlagosan 9600/2 = 4800 utast kezelnek naponta.
Mindegyik ellenőrzőpont esetében

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad 1/7 \text{ perc} = 1/420 \text{ óra.}$$

Tehát

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Nap}} = 2\,(4800)10(1/420) = \$229/\text{nap}$$

$$\frac{\text{Kiszolgálási költség}}{\text{Nap}} = 2(274) = \$548$$

Két ellenőrzőpont esetén tehát a napi teljes költség = \$777

Mivel három ellenőrzőpont esetén csak maga a kiszolgálási költség naponta 3(274) = \$822 > \$777, ezért a két elelnőrzőpont működtetése minimalizálja a napi költségeket.

6a-6c. Mindegyik munkást egy M/M/1 rendszernek tekinthetjük, akiknél $\lambda = 60R$ gép/óra. Ezáltal

$$W = \frac{1}{\mu - 60R} \quad \text{és}$$

$$\text{Óránkénti késedelmi költség} = \frac{c_m(60M)}{\mu - 60R}$$

Óránkénti munkaerőköltség = $c_s M/R$

Legyen TC(R) a teljes óránkénti költség, ha mindegyik munkáshoz R gépet rendeltünk hozzá. Ekkor

$$TC(R) = \frac{c_s M}{R} + \frac{60\ c_m M}{\mu - 60R}$$

$$TC'(R) = \frac{-c_s M}{R^2} + \frac{3600 c_m M}{(\mu - 60R)^2}$$

Tehát TC' (R) = 0 ha

$$\frac{3600_m}{(\mu - 60R)^2} = \frac{c_s}{R^2}$$

$$\frac{60 c_m 1/2}{\mu - 60R} = \frac{c_s 1/2}{R}$$

$$R = \frac{\mu/60}{1 - (c_m/c_s)\ 1/2}$$

Ellenőrizhetjük, hogy TC'' (R) < 0, azaz valóban minimumban vagyunk. Figyeljük meg, hogy az R optimális értéke független az M értékétől, mert mind a kiszolgálási költség, mind a késedelmi költség az M-mel egyenesen arányos.

d. μ = 3600/7.8 = 462 gép/óra. Ekkor

$$R = \frac{462/60}{1 + (.78/2.75)\ 1/2} = 5.02$$

A vállalatnak tehát 5 gépet kell minden egyes munkáshoz hozzárendelnie és 200/5 = 40 munkást kell foglalkoztatnia. Nyilvánvaló, hogy a gépleállások aránya függ a működésben lévő gépek számától. Ha egy adott munkáshoz rendelt gépek mindegyike elromlik, akkor abban a pillanatban nem lehet újabb leállás. Gyakorlastilag egy gépjavítási modellel van dolgunk(lásd a 20.9. alfejezetet).

7. Legyen az állapotváltozó értéke mindig a várakozó taxik száma. A születési-halálozási folyamat paraméterei ebben az esetben
λ_j = 1 taxi/perc, j = 0,1,2,...
μ_j = 2 taxi/perc, j = 1,2...
μ_0 = 0

Gyakorlatilag tehát egy M/M/1 modellünk van. Az összes taxi várakozik, tehát $L = \lambda/(\mu - \lambda) = 1/(2 - 1) = 1$ taxi. Mindegyik taxi fel fog venni egy utast.

Mivel óránként átlagosan 60 taxi érkezik, ez azt jelenti, hogy óránként átlagosan 60 taxinak is kell távoznia. Ez alapján a taxisok óránkénti átlagos keresete 60(2) = $120.

8. A késedelmi költség/csekkfeldolgozási óra a banknak az a költsége, ami egyetlen csekk egy órás feldolgozatlanságából fakad. Mivel $1 kamata évi 20 cent, a kamatveszteség $1 .20/2,000 = $.0001 óránként. Mivel egy átlagos csekk 100 dollárra szól
Késedelmi költség/csekkfeldolgozási óra = 100($.0001) =
$.01/csekkfeldolgozási óra

Az 1. gép egy M/M/1 rendszer, $\lambda = 800$ csekk/óra és $\mu = 1,000$ csekk óránként.
$W = 1/(\mu - \lambda) = 1/200$ óra és
Késedelmi költség/Csekk = .01(1/200) = $.00005 és
Késedelmi költség/Óra = (800 csekk/óra) ($.00005/csekk)
= $.04
Az 1. gép bérleti költsége óránként 10,000/2,000, azaz az 1. gépre
Teljes költség/Óra = 10,000/2,000 + .04 = $5.04 óránként.

A 2. gép óránkénti bérleti költsége 15,000/2,000 = $7.50, vagyis egyértelműen az 1. gépet kell választani.

9. Legyen q = az optimális tételnagyság. Ekkor a tételenkénti gyártásra egy M/M/1 rendszerünk van $\lambda = 100/q$ és $\mu = (.05 + q/150)^{-1}$ paraméterekkel. A q értékét akarjuk minimalizálni

$$W(q) = 1/(\mu - \lambda) = \frac{1}{(.05 + q/150)^{-1} - 100/q} = \frac{1/20 + q/150}{1/3 - (5/q)}$$

A $W'(q) = 0$ egyenlőségből a $q = 33.4$ minimalizálja $W(q)$-t.

10. 1992-ben $\lambda = 1.8$ űrlap/hét és $\mu = 4$ űrlap/hét. Ekkor $W = 1/(4-1.8) = .45$ hét. Tegyük fel, hogy a $\mu = 4$ űrlap/hét gyorsaság változatlan 1993-ban is: ebben az esetben az új $W = 1/(4-3.9) = 10$ hét! Ha tehát ügyintézőnk változatlan munkaintenzitással dolgozik, a megnövekedett munkamennyiség a hátralékot több mint 2000%-kal növeli meg! Ez természetesen azt jelenti, hogy nincs semmi ok az ügyintéző elbocsátására. Sőt, még abban az esetben is, ha az ügyintéző $\mu = 4.12$ űrlap/hét-re növeli teljesítményét, a W növekedése még akkor is tízszeres! A feladatban természetesen az M/M/1 rendszer feltevéseivel éltünk.

11a. $L + 1 = \mu/(\mu-\lambda)$, so $(L+1)W_s = 1/(\mu-\lambda) = W$

11b. $LW_s = (\lambda/(\mu-\lambda))(1/\mu) = W_q$

11c. Mivel egy "átlagos" beérkező akkor jön, amikor L ügyfél van jelen a rendszerben, átlagosan L + 1 kiszolgálási időt kell a rendszerben tartózkodnia, és ez (átlagban) $(L+1)W_s$ időegységet vesz igénybe. Emiatt $W = (L+1)W_s$.

Mivel az "átlagos" beérkező akkor jön, amikor L ügyfél van a rendszerben, L kiszolgálási időtartamnyit kell átlagosan a sorban eltöltenie, ez pedig (átlagban) LW_s időegység. Emiatt $W_q = LW_s$.

20.5. alfejezet

1. M/M/1/3 rendszerünk van, λ = 3 ügyfél/óra és μ = 2 ügyfél/óra.

a. A $\lambda(1-\pi_3)$ értékét keressük. Mivel

$$\pi_0 = \frac{1 - 3/2}{1 - (3/2)^4} = \frac{16}{130}$$

$\pi_3 = (3/2)^3 16/130) = .415.$

$\lambda(1 - \pi_3) = 1.75$ ügyfél/óra.

b. $1 - \pi_0 = 114/130$

2. M/M/1/4 rendszerünk van, ahol μ = 15 autó/óra és λ = 40 autó/óra.

2a. $L_q = L - L_s$ $\rho = 40/15 = 2.67$

$$L = \frac{2.67\,[1 - 5(2.67)^4 + 4(2.67)^5]}{(1 - 2.67^5)\ (1 - 2.67)} = 3.44$$

$$\pi_0 = \frac{1 - 2.67}{1 - 2.67^5} = .012 \quad L_s = 1 - \pi_0 = .99$$

$L_q = 3.44 - .99 = 2.45$

2b. $\lambda(1 - \pi_4) = 40(1 - .61) = 15.6$ autó/óra

$\pi_4 = (2.67)^4(.012) = .61)$

$$2c.\ W = \frac{L}{\lambda(1 - \pi_4)} = \frac{3.44}{40(1 - .61)} = .22 \text{ óra.}$$

3. Legyen $S = 1 + \rho + \rho^2 + \ldots\rho^c$.

Ekkor $\rho S = \rho + \rho^2 + \ldots\rho^{c+1}$ és vonjuk ki a második egyenletet az elsőből.

$S - \rho S- = 1 - \rho^{c+1}$

$S = (1 - \rho^{c+1})/(1 - \rho)$.

5. (16) alapján
$\pi_1 = \rho\pi_0$, $\pi_2 = \rho^2\pi_0, \ldots, \pi_c = \rho^c\pi_0$. Mivel a stacionárius valószínűségek összegének 1-et kell adniuk

$\pi_0(1 + \rho + \rho^2 + \ldots\rho^c) = 1$.

A 3. feladatot felhasználva

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{c+1}}.$$

6. Mindegyik fodrász egy M/M/1/4 rendszer. Az 1. fodrásznál $\lambda = 10$ vendég/óra és $\mu = 5$ vendég/óra. Így

$\rho = 10/5 = 2$. Ekkor

$$\pi_0 = \frac{1 - 2}{1 - 2^5} = \frac{1}{31} \quad \text{and } \pi_4 = (2)^4(1/31) = 16/31.$$

Az 1. fodrász várható óránkénti bevétele [1-(16/31)](10 vendég/óra) ($11) = $53.23.

A 2. fodrász esetében $\lambda = 10$ vendég/óra, $\mu = 10$ vendég/óra és $p = 1$. Így minden π_j 1/5-del eygenlő és a 2. fodrász várható óránkénti bevétele [1-(1/5](10 vendég/óra)($5/vendég) = $40

Az 1. fodrásznak lesz tehát több bevétele.

7. A $\lambda = \mu = 60$ hívás/óra értékekkel számolva és c változtatásával a 99 hívás (98 várakozik) esetén fog a hívók 1%-a foglalt jelzést hallani.

20.6. alfejezet

1. $\lambda = 18$ vevő/óra, $\mu = 15$ vevő/óra. Ha s kiszolgálóhelyünk van, akkor $\rho = 18/15s$, vagyis legalább két pénztárra van szükség, hogy $\rho < 1$ teljesüljön.

$$\text{Az } s = 2 \text{ esetre } \rho = .60 \text{ és } W = \frac{.45}{30-18} + \frac{1}{15} = .104 \text{ óra és a}$$

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Óra}} = \frac{\$15}{\text{vevőóra}} \; \frac{18 \text{ vevő}}{\text{óra}} (.104 \text{ óra}) = \$28.08$$

Teljes költség/Óra = 40 + 28.08 = $68.08

3 pénztár esetében $\rho = 18/45 = .40$ és

$$W = \frac{.14}{45-18} + \frac{1}{15} = .072 \text{ óra}$$

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Óra}} = \frac{\$15}{\text{vevőóra}} \; \frac{18 \text{ vevő}}{\text{óra}} \; (.072 \text{ óra}) = \$19.44$$

Tehát s = 3 esetén az óránkénti teljes költség = 60 + 19.44 = $79.44

Két pénztár előnyösebb, mint három. Négy, vagy több pénztár esetében a kiszolgálási költség $80, vagy több, azaz 2 pénztár beállítása optimális.

2. $\lambda = 50$ ügyfél/nap, $\mu = 60$ ügyfél/nap. Ha s ügyintéző van, akkor a Várható költség/Nap = 100's + $\lambda(100W)$.

s = 1-re $W = 1/(60 - 50) = 1/10$ nap és a
Várható költség/Nap = 100 + 50 (100) (1/10) = $600

s = 2-re $\rho = 50/120 = .41$ Interpolációval azt kapjuk, hogy $P(j \geq 2) = .24$

$$W = \frac{.24}{120-50} + \frac{1}{60} = .020 \text{ nap.}$$ és a

Várható költség/Nap = 200 + 50(100) (.020) = $300/nap.

Mivel három vagy több ügyintéző legalább napi 300 dollárba kerül, két ügyintéző alkalmazása az optimális.

3. A pénzügy egy M/M/1 rendszer $\lambda = 20$ levél/nap és $\mu = 25$ levél/nap paraméterekkel.
$W_{Pénzügy} = 1/(25-20) = 1/5$ nap.

A marketing egy M/M/1 rendszer $\lambda = 15$ levél/nap és $\mu = 25$ levél/nap paraméterekkel.
$W_{Marketing} = 1/(25-15) = 1/10$ nap.

Az egyesített rendszer M/M/2 lesz $\lambda = 20 + 15 = 35$ levél/nap és $\mu = 25$ levél/nap paraméterekkel. Ekkor $\rho = 35/2(25) = .70$ és $P(j \geq 2) = .57$.

$L_q = (.57).70/(1 - .70) = 1.33$ levél és

$$W = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1.33}{35} + \frac{1}{25} = .078 \text{ nap.}$$

Így tehát mindkét osztály számára előnyösebb az egyesített rendszer. Ennek az az oka, hogy ha a két osztály együtt látja el feladatokkal a gépírókat, akkor az egyes gépíróknak kevesebbet kell munkára várniuk és ezáltal a rendszer hatékonyabbá válik. A (d) kérdés megválaszolásához vegyük észre, hogy M/M/2 rendszerünk van, λ = 35 levél/nap és μ = 25 levél/nap paraméterekkel. Így ρ = 35/50 = .70 és $P(j \geq 2) = .57$. Ekkor

$$P(W > .20) = e^{-25(.20)}\left[1 + (.57)\frac{1-e^{-25(.20)(-.4)}}{-.4}\right] = .068$$

4. Mivel λ = 100 vevő/óra és μ = 50 vevő/óra, ezért legalább 3 pultra van szükség ahhoz, hogy $\lambda < s\mu$ teljesüljön.

s = 3-ra ρ = 100/150 =.67, így interpolációval $P(j \geq 3) = .46$ és

$$L_q = \frac{.46(2/3)}{1-(2/3)} = .92 \text{ vevő és } W_q = \frac{L_q}{\mu} = .0092 \text{ óra.}$$

Késedelmi költség/Óra = 100(20)(.0092) = \$18.40
Teljes költség/Óra = 3(5) + 18.40 = \$33.40

Négy pult esetében (s = 4) ρ = 100/200 = .50 és $P(j \geq 4) = .17$. Ekkor

$$L_q = \frac{.17(.50)}{1-.50} = .17 \text{ vevő}$$

$W_q = L_q/\lambda = .0017$ óra
.
Késedelmi költség/Óra = 100(20)(.0017) = \$3.40 és a
Teljes költség/Óra = 4(5) + 3.40 = \$23.40

s = 5 vagy nagyobb s értékek esetén a kiszolgálás költsége \$25, vagy meghaladja azt.

4 pult tehát az optimális.

5. A bankot M/M/s rendszerként modellezzük, ahol λ = 100 ügyfél/óra és μ = 60 ügyfél/óra. $\rho < 1$ teljesüléséhez legalább 2 ügyintézőre van szükség.

s = 2-re ρ = 100/120 = .833 és interpolációval $P(j \geq 2) = .76$ és
$P(W_q > 1/12) = \{P(j \geq 2)\}e^{-120(1-5/6)1/12} = .76e^{-5/3} = .143$.

s = 3-ra ρ = 100/180 = .555 és $P(j \geq 3) = .29$. Ekkor
$P(W_q > 1/12) = (P(j \geq 3)e^{-180(1-.56)(1/12)}) = .29e^{-6.6} = .0004$.

Három ügyintézővel teljesíthető a megkívánt előírás.

6a. M/M/5 rendszer, λ = 90 vendég/óra, és μ = 20 vendég/óra. $P(j \geq 5)$ = .76. Ekkor $W_q = P(j \geq 5)/(100-90) = .076$ óra.
Várható költség/Óra = $10(5) + 20(90)W_q$ = 50 + 1800(.076) = \$186.80.

6b. Automatával M/M/1 rendszerünk van λ = 18 vendég/óra és μ = 60 vendég/óra, és egy M/M/4 rendszer λ = 72 vendég/óra és μ = 20 vendég/óra paraméterekkel.

Az automatára W_q =18/(60(60-18)) = .0071 óra és

Várható költség/Óra = 6 + 20(18)W_q = \$8.57.

Az M/M/4 rendszerre P(j ≥ 4) = .79 so W_q = .79/8 = .0988 és
Várható költség/óra = 10(4) + 20(72)(.0988) = \$182.27

Automatát is bevonva tehát a teljes óránkénti költség 182.27 + 8.57 = 190.83.

Nincs tehát szükség az automatára.

7. s	Kiszolgálási költség/óra	Késedelmi költség/óra	Teljes költség/Óra
3	\$75	50*15*W_q = \$13.50	\$88.50
4	\$100		

3 ablak az optimális W_q = P(j ≥ 3)/(75 - 50) = .45/25 = .018

8. A számítógépes output azt mutatja, hogy 14 vagy 15 ügyfélszolgálati pult lehet optimális. Az S = 14 és S = 15 eseteket megvizsgálva azt kapjuk, hogy 15 pult lesz az optimum (a várható óránkénti költség \$160.24).

```
MODEL:
MIN=10*S+50*300*@PEB(10,S)/(30*S-300);
S>11;
END
```

```
Local optimal solution found at step:          12
 Objective value:                         160.0811

                       Variable           Value        Reduced Cost
                              S        14.76583           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        160.0811            1.000000
                              2        3.765833           0.0000000
```

9. Az 1. rendszer négy M/M/1 rendszert tartalmaz, λ = 25 ügyfél/óra és μ = 30 ügyfél/óra mindegyikre. Ekkor L = 25/(30-25) = 5 ügyfél mindegyik rendszerben és átlagban 4(5) = 20 ügyfél tartózkodik a bankban.

A 2. rendszerben egy M/M/4 rendszerünk van μ = 30 ügyfél/óra és λ = 100 ügyfél/óra paraméterekkel. Ekkor ρ = 100/120 = .833 és interpolációval P(j ≥ 4) = .66. Így
L_q = (.66) (.833)/(1 - .833) = 3.29
L = L_q + λ/μ = 3.29 + 100/30 = 6.62 ügyfél.

A 2. rendszerben tehát rövidebb a sor és a várakozási idő, mint az 1. rendszerben.

Az 1. rendszerben P(j ≥ 1) = 1 - $^{\pi}0$ = 1 - 1/6 = 5/6. Ekkor (45)-ből

$$P(W > .133 \text{ óra}) = e^{(-30)\,(.133)} \left\{1 + .833 \frac{1 - e^{-30(.133)\,(1-1-.833)}}{1 - 1 - .833}\right\} = .51$$

A 2. rendszerben (45)-ből

$$P(W > .133 \text{ óra}) = e^{(-30).133)} \left\{1 + .66 \frac{1 - e^{-30\,(.133)\,(4-1-3.33)}}{4 - 1 - 3.33}\right\} = .120$$

A 2. rendszer tehát most is felülmúlja az 1. rendszert.

10. $\lambda = 1$ ügyfél/óra és $1/\mu = 3/4$ óra. Az $L_s = \lambda W_s$ alapján $L_s = 1\ (3/4) = 3/4$ ügyfél. Figyeljük meg, hogy igazoltan használtuk a $L_s = \lambda W_s$ képletet, mert $\lambda < 3\mu$ esetében létezik a stacionárius állapot. Ugyancsak igaz az, hogy válaszunkban nem használtuk fel azt, hogy a kiszolgálási idők exponenciálisak.

11.

1. rendszer	2. rendszer
$\lambda_j = \lambda$	$\lambda_j = \lambda \quad j = 0,1,2,....$
$\mu_0 = 0$	$\mu_0 = 0$
$\mu_1 = 3\mu$	$\mu_1 = \mu$
$\mu_2 = 3\mu$	$\mu_2 = 2\mu$
$\mu_3 = 3\mu$	$\mu_3 = 3\mu$
$\mu_j = 3\mu$	$\mu_j = 3\mu \quad j = 4,5.....$

Az 1. rendszer 1. és 2. állapotában magasabb a halálozási gyakoriság, míg a két rendszer összes többi állapotában azonosak a halálozási gyakoriságok. Figyeljük meg azt is, hogy a rendszer minden állapotában azonosak a születési gyakoriságok. Ez alapján azt gondoljuk (és valóban, ezt a sejtést bizonyítani is lehet), hogy az 1. rendszer hatékonyabb, mint a 2. rendszer, és ezért az 1. rendszerben az L és a W értéke kisebb, mint a 2. rendszerben. Általánosan is megmutatható (feltéve, hogy mindkét rendszerben azonos a beérkezések között eltelt időtartamok eloszlása), hogy egy M/M/1 rendszer, amelynek $s\mu$ a kiszolgálási gyakorisága, kisebb L és W értékeket ad, mint a μ kiszolgálási gyakorisággal rendelkező s kiszolgálóhelyet tartalmazó M/M/s rendszer. A valóságban azért találkozunk ritkán ilyen egykiszolgálós rendszerekkel, mert általában nem könnyű egyetlen "gyors", $s\mu$ kiszolgálási gyakoriságú gépet (rendszert) konstruálni. Ez az egyszerű elemzés eltekint az utazási idő figyelembe vételétől is, amelyik a többkiszolgálós rendszereket előnyösebbnek mutatja (gondoljuk el, mi lenne, ha a Pentagon épületében egyetlen mosdó lenne csak!).

20.7. alfejezet

1. $\lambda = 100$ tag/hét, $W = 52$ hét. Ekkor $L = \lambda W = 5200$ klubtag.

2. L = a doktorjelöltek átlagos száma az egyetemen, $1/\mu = W = 4$ év, tehát $L = 25(4) = 100$ résztvevő.

3. Legyen F egy véletlen változó, amelyik az üzemek számát jelöli a stacionárius állapotban. Ekkor F Poisson eloszlású, 200 várható értékkel és 200 szórással. F-et normál eloszlással közelítve

$$P(F \geq 300) = P\left(\frac{F-200}{(200)^{1/2}} \geq \frac{300-200}{(200)^{1/2}}\right) = P(Z \geq 7.1) = 0$$

20.8. alfejezet

1. Alkalmazzuk a Pollachek-Khinchine formulát: $\sigma^2 = 0, \lambda = 20$ ügyfél/óra és $\mu = 30$ ügyfél/óra. Ekkor

$$L_q = \frac{(20)^2\,(0) + (2/3)^2}{2(1 - 2/3)} = 2/3 \text{ ügyfél és}$$

$W_q = L_q/\lambda = (2/3)/20 = 1/30$ óra = 2 perc.

2. $L_s = 0\pi_0 + 1\,(\pi_1 + \pi_2 \ldots) = 1 - \pi_0$. Tehát $1 - \pi_0 = \lambda/\mu$, amiből az következik, hogy annak valószínűsége, hogy egy kiszolgálóhely foglalt λ/μ.

3a.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		Prob	Time(hours)				
4		0.95	0.016667				
5		0.05	0.041667				
6							
7		mean	0.017917		Lq	0.990196	
8		variance	2.97E-05		Wq	0.024755	HOURS
9		ro	0.716667				
10		lambda	40				
11		mu	55.81395				
12							

3b.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		Prob	Time(hours)				
4		0.95	0.016667				
5		0.05	0.041667				
6							
7		mean	0.016667		Lq	0.666667	
8		variance	0		Wq	0.016667	HOURS
9		ro	0.666667				
10		lambda	40				
11		mu	60				

4a. Ha már ismerjük az X_k értékét, az X_{k+1} értéke nem függ egyetlen előző X_j értéktől sem.

4b. $P(X_{k+1} = j|X_k = i) = 0$, $j < i - 1$ esetén, mertmég ha senki sem érkezik a k-adik kiszolgálási idő alatt, $j = i - 1$. A $j < i - 1$ tehát lehetetlen.

4c. Tegyük fel, hogy $i > 0$. Ha n beérkezés történik egy kiszolgálás elvégzése alatt, akkor a következő kiszolgálás befejezéséig $i + n - 1$ ügyfél lesz jelen. Ekkor ahhoz, hogy az új állapot $i - 1$ legyen, az szükséges, hogy $n = 0$ legyen, ahhoz, hogy az új állapot i legyen, $n = 1$ szükséges, ahhoz pedig, hogy az új állapot j legyen, $i + n - 1 = j - i + 1$ kiszolgálásnak kell befejeződnie a kiszolgálási idő alatt. Ha $i = 0$, akkor j kiszolgálásnak kell végbemennie a k-adik ügyfél kiszolgálási ideje alatt.

4d. $i > 0$-ra P_{ij} = (annak a valószínűsége, hogy a kiszolgálási idő x és x + dx közé esik)*(annak a valószínűsége, hogy $j - i + 1$ beérkezés történik az x hosszúságú kiszolgálási idő alatt).

Annak valószínűsége hogy a kiszolgálási idő x és x + dx közé esik s(x)dx. A beérkezések száma az x időintervallumban Poisson eloszlású λx paraméterrel, tehát annak a valószínűsége, hogy $j - i + 1$ beérkezés történik az x időtartam alatt

$$\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}$$

Közelítsen dx a 0-hoz, és ekkor a kívánt eredményhez jutunk.

Ha i = 0, akkor

$$P_{0j} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^j s(x)dx}{j!}$$

20.9. alfejezet

1. Két különböző gépjavítási rendszert hasonlítunk össze:

1. rendszer: $\lambda = 1/5$ gép/nap $\mu = .4$ gép/nap $K = 5, R = 3, \rho = .5$
2. rendszer: $\lambda = 1/5$ gép/nap $\mu = 1.2$ gép/nap $K = 5$ $R = 1$ $\rho = 1/6$

Legyen L = a meghibásodott mosógépek száma. Hasonlítsuk össze a két rendszerbeli L értékeket. Az 1. rendszerben

$$\pi_1 = \binom{(5)}{(1)}(1/2)\ \pi_0 = (5/2)\pi_0$$

$$\pi_2 = \binom{(5)}{(2)}(1/2)^2\pi_0 = (5/2)\pi_0$$

$$\pi_3 = \binom{(5)}{(3)}(1/2)^3\pi_0 = (5/4)\pi_0$$

$$\pi_4 = \binom{(5)}{(4)}(1/2)^4 \frac{4!}{3!(3)} \pi_0 = (5/12)\pi_0$$

$$\pi_5 = \binom{(5)}{(5)}1/2)^5 \frac{5!}{3!3^2}\pi_0 = (5.72)\pi_0$$

Ekkor $\pi_0[1 + (5/2) + (5/2) + (5/4) + (5/12) + (5/72] = 1$
$\pi_0 = 72/557$, $\pi_1 = 180/557$, $\pi_2 = 180/557$, $\pi_3 = 90/557$,
$\pi_4 = 30/557$, $\pi_5 = 5/557$

$$L = \frac{0(72) + 1(180) + 2(180) + 3(90) + 4(30) + 5(5)}{557} = \frac{955}{557}$$

$$= 1.71 \text{ gép}$$

A 2. rendszerben

$$\pi_1 = \binom{(5)}{(1)}(1/6)\pi_0 = (5/6)\pi_0$$

$$\pi_2 = \binom{(5)}{(2)}(1/6)^2 2!\pi_0 = (20/36)\pi_0$$

$$\pi_3 = \binom{(5)}{(3)}(1/6)^3 3!\pi_0 = (60/216)\pi_0$$

$$\pi_4 = \binom{(5)}{(4)}(1/6)^4 4!\pi_0 = (5/54)\pi_0$$

$$\pi_5 = \binom{(5)}{(5)}(1/6)^5 5!\pi_0 = (20/1296)\pi_0.$$

Ekkor $\pi_0(1 + (5/6) + (20/36) + (60/216) + (5/54) + (20/1296) = 1$
$\pi_0 = 1296/3596, \pi_1 = 1080/3596, \pi_2 = 720/3596, \pi_3 = 360/3596,$
$\pi_4 = 120/3596$ és $\pi_5 = 20/3596$.

A 2. rendszerben tehát

$$L = \frac{1(1080) + 2(720) + 3(360) + 4(120) + 5(20)}{3596} = \frac{4180}{3596}$$

$= 1.16$ gép.

A 2. rendszer tehát jobb az 1. rendszernél.

2. Legyen j a kosárban lévő kiskutyák száma. Ekkor a kiszolgálási idő egyenlő azzal az idővel, amit egy kiskutya a kosarában tölt. A meghibásodási idő azzal az idővel egyenlő, amennyi idő után a kiskutya visszaugrik a kosárba. Ekkor egy olyan gépjavítási feladatunk van, ahol $K = R = 3$, $\mu = 6$ kiskutya/óra, $\lambda = 4$ kiskutya/óra.

Mivel $\rho = 4/6 = 2/3$, (52)-ből azt kapjuk, hogy

$$\pi_1 = \binom{(3)}{(1)} (2/3)\pi_0 = 2\pi_0$$

$$\pi_2 = \binom{(3)}{(2)}(2/3)^2\pi_0 = (4/3) = \pi_0$$

$$\pi_3 = \binom{(3)}{(3)}(2/3)^3\pi_0 = (8/27))\pi_0$$

Ekkor $\pi_0 \ (1 + 2 + (4/3) + (8/27)) = 1$
$\pi_0 = 27/125,\ \pi_1 = 54/125, \pi_2 = 36/125, \pi_3 = 8/125$

a. $\pi_0 + \pi_1 = 81/125$.

b. $\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 = 150/125 = 6/5$ kiskutya lesz a kosárban.

3. Legyen L = a kiégett utcai égők átlagos száma
W = a kiégéstől a javításig eltelt átlagos idő

λ = a naponta kiégő lámpák átlagos száma.

Adott, hogy L = 1,000 lámpa. Mivel mindegyik égő napi 1/100 gyakorisággal ég ki, és átlagban 10,000-1,000 = 9,000 lámpa működik egy tetszőleges időpontban, λ = 9,000(1/100) = 90 égő/nap. Tudjuk, hogy $L = \lambda W$ alapján $W = L/\lambda$ = 1,000/90 = 11.11 a naponta kiégő lámpák száma.

4. Ez a rendszer egyetlen eddig tárgyalt modellel sem azonos. Modellezni tudjuk viszont a születési-halálozási folymat segítségével. Ha s kiszolgálót veszünk fel, akkor (stacionárius állapotban) megadható az óránkénti várható bevétel és a várható költség különbsége.

$.50(20\pi_0 + 15\pi_1 + 10\pi_2 + 5\pi_3) - 3s$

Felhasználjuk, hogy $\lambda_0 = 20, \lambda_1 = 15, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 5$ és $\lambda_4 = 0$.

s = 1-re $\mu_0 = 0$ és j = 1,2,3,4-re μ_j = 10 vevő/óra. Ekkor

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0\pi_0}{\mu_1} = 2\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1\pi_0}{\mu_1\mu_2} = 3\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\pi_0}{\mu_1\mu_2\mu_3} = 3\pi_0$$

$$\pi_4 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3\pi_0}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 1.5\pi_0$$

Tehát $\pi_0(1 + 2 + 3 + 3 + 1.5) = 1$
$\pi_0 = 2/21, \pi_1 = 4/21, \pi_2 = 6/21, \pi_3 = 6/21$ és $\pi_4 = 3/21$.

Ekkor s = 1-re a várható bevétel és költség különbsége óránként
.50 {20(2/21) + 15 (4/21) + 10(6/21) + 5(6/21)}-3 = $1.52/óra.

s = 2-re $\mu_0 = 0, \mu_1 = 10, \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 20$ és

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0\pi_0}{\mu_1} = 2\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1\pi_0}{\mu_1\mu_2} = (3/2)\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda\pi_0}{\mu_1\mu_2\mu_3} = (3/4)\pi_0$$

$$\pi_4 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3\pi_0}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = (3/16)\pi_0.$$ Ekkor

$\pi_0 = 16/87, \pi_1 = 32/87, \pi_2 = 24/87, \pi_3 = 12/87, \pi_4 = 3/87$ tehát
s = 2-re a várható bevétel és költség különbsége óránként
.50{20(16/87 + 15(32/87) + 10(24/87) + 5(12/87}-6 = $.32/óra.

s = 3-ra még ha 20 vevő/óra a kiszolgálási gyakoriság, akkor is az a legjobb, ha a bevétel és a költségek különbsége .50 (20) - 9 = $1/óra.

Az optimális tehát az egyetlen alkalmazott.

5a. Adott, hogy $\lambda_i = \lambda/(n+1)$ és $\mu_i = \mu$. Legyen $\rho = \lambda/\mu$.

Ekkor $$\pi_n = \frac{\pi_0\lambda^n/n!}{\mu^n}$$

$\pi_n = \pi_0\rho^n/n!$. Így $\pi_0 \sum_{n=0}^{n=\infty} \rho^n/n! = 1$, azaz $\pi_0 = e^{-\rho}$ és $\pi_n = \rho^n e^{-\rho}/n!$.

5b. $$L = \sum_{n=0}^{n=\infty} n\pi_n = \sum_{n=1}^{n=\infty} \rho^n e^{-\rho}/(n-1)! = \rho e^{-\rho} \sum_{n=1}^{n=\infty} \rho^{n-1}/(n-1)!$$

$= \rho e^{-\rho}e^{\rho} = \rho$

6. Az (55)-ből $\lambda/\lambda = K - L$. Innen megkaphatjuk a kívánt eredményt.

7. Legyen K = a bulldózerhez használt dömperek száma. Ekkor a költség/óra hányados értéke 40K + 100. Legyen i = az éppen a bulldózernél tartózkodó dömperek száma. Ekkor stacionárius állapotban $5(1 - \pi_0)1000$ köbméter föld fog óránként a bulldózerből a dömperekbe kerülni. Tehát $10{,}000{,}000/5000(1 - \pi_0) = 2000/(1 - \pi_0)$ órába telik az összes föld dömperekre rakása. Ha tehát az optimális K értéket akarjuk megtalálni, akkor a $2000(40K + 100)/(1 - \pi_0)$ kifejezést kell minimalizálni, ami egyszerűen $(40K + 100)/(1 - \pi_0)$ minimalizálását jelenti. A π_0 értéket a gépjavítási modellből nyerjük, ahol a dömper akkor van működésképtelen állapotban, ha a bulddózernél várakozik. Ekkor $\lambda = 12$ dömper/óra és $\mu = 5$ dömper/óra, $\rho = 12/5 = 2.4$. Az R = 1 értéket választjuk, mert csak egy bulldózerünk van.

Ekkor K = 1 esetén
$\pi_1 = 2.4\pi_0$ és $\pi_0 + \pi_1 = 1$. Ebből azt kapjuk, hogy $\pi_0 = .294$ és
$(40K + 100)/(1 - \pi_0) = 198.3$.

K = 2 esetén
$\pi_1 = 2(2.4)\pi_0$, $\pi_2 = 2(2.4)^2\pi_0$, és $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$. Ekkor azt kapjuk, hogy $\pi_0 = .058$ és

$(40K + 100)/(1 - \pi_0) = 191.08.$

$K \geq 3$ esetén $(40K + 100)/(1 - \pi_0) > 220$,

tehát $K = 2$ fogja minimalizálni a teljes költséget.

20.10. alfejezet

1. Az 1. lehetőség egy M/M/2 rendszer $\lambda = 4.8$ igénylő/óra és $\mu = 4$ igénylő/óra, $\rho = 4.8/12 = .40$ és $P(j \geq 3) = .14$. Ekkor

$$L_q = \frac{.14(.40)}{1 - .40} = 0.09 \text{ igénylő}$$

$L + L_q + \lambda/\mu = 0.09 + 4.8/4 = 1.29$ igénylő

$W = L/\lambda = 1.29/4.8 = .27$ óra

A 2. lehetőség esetében W_1 legyen az 1. szint várható ideje és W_2 legyen a 2. szint várható ideje. Ekkor az 1. szint egy M/M/∞ rendszer, $W_1 = 1/\mu = 1.08$ óra.

W_2 kiszámolásához vegyük észre, hogy a 2. szint egy M/M/3 rendszer, ahol $\rho = 4.8/45 - .11$.
Ekkor $P(j \geq 3) = 0$, tehát L_q a 2. szintre 0. A 2. szintre $L = L_q = 0$.
$L = L_q + \lambda/\mu = 0 + 4.8/15 = .32$ ügyfél és $W_2 = L/\lambda = .32/4.8 = .07$ óra.

$W_1 + W_2 = 1.08 + .07 = 1.15$ óra, tehát az 1. lehetőséget használva sokkal kisebb a várakozási idő, mint a 2. lehetőségnél.

2a. A beillesztett motorok nélküli autók száma azoknak az autóknak a számával lesz egyenlő, amelyek a rendszer "motorszerelés" körében vannak bent. Ez egy M/M/2 rendszer, ahol $\lambda = 22.4$ autó/óra, $\mu = 16$ autó/óra és $\rho = 22.4/32 = .70$. Ekkor $P(j \geq 2) = .57$ és

$$L = \frac{.57(.7)}{1 - .7} + \frac{22.4}{16} = 2.73 \text{ autó}$$

A 2. feladathoz tartozó ábra

1 kiszolgáló   2 kiszolgáló

motorszerelés

λ = 22.4 autó/óra   festés

motorszerelés

μ_1 = 25 autó/óra μ_2 = 16 autó/óra

b. $L_q = \dfrac{.57(.7)}{1-.7}$ = 1.33 autó. Ekkor $W_q = L_q/\lambda$ = 1.33/22.4 = .06 óra.

3. Az 1. rendszer 2 M/M/1 rendszert tartalmaz.
Az 1. szinten λ = 40 ügyfél/óra és μ = 120 ügyfél/óra.
A 2. szinten λ = 40 ügyfél/óra és μ = 60 ügyfél/óra.

A 2. rendszer egyetlen M/M/2 rendszer, ahol λ = 40 ügyfél/óra és μ= 40 ügyfél/óra.

Az 1. rendszerben
1. szint W = 1/(120 - 40) = 1/80 óra
2. szint W = 1/(60 - 40) = 1/20 óra
A teljes 1. rendszerre tehát W = 1/80 + 1/20 = 1/16 óra.

A 2. rendszerben ρ = 40/80 = .50 és P (j $\geq$ 2) = .33. Így

$L_q = \dfrac{.33(.50)}{1-.50}$ = .33 ügyfél.

$L = L_q + \lambda/\mu$ = .33 + 1 = 1.33 ügyfél.
és $W = L/\lambda$ = 1.33/40 = .033 óra.

A 2. rendszerben tehát az ügyfélnek kevesebbet kell várakoznia. vegyük észre, hogy az ügyfelek kiszolgálási idejének átlaga mindkét rendszerben azonos.

4. 3 M/M/1 rendszerünk van láncoltan. Mindegyik szintre λ = 2 diák/perc.
Az 1. szinten μ = 3 diák/perc, ρ = 2/3
A 2. szinten μ = 4 diák/perc, ρ = 2/4
A 3. szinten μ = 5 diák/perc, ρ = 2/5

Mindegyik szinten $L = \rho/(1-\rho)$. Ekkor

Az 1. szinten $L = \dfrac{2/3}{1/3} = 2$ diák

A 2. szinten $L = \dfrac{2/4}{2/4} = 1$ diák

A 3. szinten $L = \dfrac{2/5}{3/5} = 2/3$ diák

Átlagban tehát 2 + 1 + (2/3) = 11/3 diák lesz jelen.

5a. $\lambda_1 = 10 + \lambda_1/3$. Így $\lambda_1 = 15$ munka/óra. Mivel $\mu = 18$ munka/óra, $L = \lambda/(\mu - \lambda) = 15/(18 - 15) = 5$ munka.

5b. Most $\mu = 12$ munka/óra. Since $\mu < \lambda_1$, ezért nincs stacionárius állapot.

6a. $\lambda_1 = 10 + .1\lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_1 + .2\lambda_3$, $\lambda_3 = .9\lambda_2$. Az egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = 11.39$, $\lambda_2 = 13.89$ és $\lambda_3 = 12.5$.Az egyes kiszolgálóhelyek az idő $\rho_i = \lambda_i/20$ törtrészében foglaltak.
Az 1. kiszolgálóhely foglalt az idő 11/(39/20) = 57%-ban,
A 2. kiszolgálóhely foglalt az idő 13.89/20 = 69.5%-ban,
A 3. kiszolgálóhely foglalt az idő 12.5/20 = 62.5%-ban.

6b. Az i-edik állomásra érkező munkák várható száma = $\lambda_i/(\mu - \lambda_i)$.
Az 1. állomásra érkező munkák várható száma = 11.39/(20 - 11.39) = 1.32
A 2. állomásra érkező munkák várható száma = 13.89/(20 - 13.89) = 2.27
A 3. állomásra érkező munkák várható száma = 12.5/(20 - 12.5) = 1.67
A rendszerben lévő összes munka várható száma = 1.32 + 2.27 + 1.67 = 5.26

6c. $W = L/\lambda$, ahol $\lambda = 10$ munka/óra. Ebből W = 5.26/10 = .526 óra.

7. Adott, hogy $r_1 = 10$termék/óra, $p_{12} = 1$, $p_{23} = 1$, $p_{32} = .20$, $p_{31} = .10$. Meg kell oldanunk a

$$\lambda_1 = 10 + .1\lambda_3$$
$$\lambda_2 = 0 + \lambda_1 + .2\lambda_3$$
$$\lambda_3 = 0 + \lambda_2$$

egyenletrendszert. A megoldás $\lambda_1 = 80/7$, $\lambda_2 = 100/7$, $\lambda_3 = 100/7$

Az egyes fázisokban lévő termékek száma $\lambda/(\mu - \lambda)$.
Az 1. fázisban L = 80/7/(20 - 80/7) = 1.33
A 2. fázisban L = 100/7/(30 - 100/7) = .91
A 3. fázisban L = 100/7/(60 - 100/7) = .31
Átlagosan tehát 1.33 + .91 + .31 = 2.55 munka van a rendszerben.

20.11. alfejezet

1. Egy BCC problémánk van, tehát a 16. ábráról a $\lambda = 24$, $\mu = 3$ és $\lambda/\mu = 8$ értékek mentén olvasunk le. Azt látjuk, hogy ahhoz, hogy legfeljebb .01 legyen az esélye annak, hogy ne érkezzen a helyszínre tűzoltóautó, legalább 15 tűzoltóautóval kell rendelkezni.

2. Ebben a BCC problémában $\lambda = 480/8 = 60$, $1/\mu = .10$ óra. Így $\lambda/\mu = 6$. Az ábráról leolvasható, hogy legalább 13 operátor szükséges. Fel kell tételeznünk, hogy a telefonhívások között eltelt idő exponenciális eloszlású (de a telefonbeszélgetések hossza nem feltétlenül az).

3. $\lambda = 20$, $1/\mu = 1/3$ óra. Így $\lambda/\mu = 6.67$ és $s = 10$.
$L + L_s = \lambda(1-.06)\ W_s = 20\ (.94)\ 1/3) = 6.27$.

4. Az Erlang érték = $\lambda(1/\mu) = \lambda/\mu$. Ezzel az Erlang értékkel az x koordináta 2 értékét kell használnunk a 16. ábrán. Azt kapjuk, hogy 7 vonalat kell létesíteni.

5. Egy olyan BCC problémánk van, ahol a kikölcsönzött könyv lesz ekvivalens a foglalt kiszolgálóhellyel. $\lambda = 26$ ember/év, $\mu = 13$ és $\lambda/\mu = 2$. Vegyük észre, hogy a Várható kölcsönzési költség/Év = λ(annak valószínűsége, hogy minden kiszolgálóhely foglalt) ($1 minden olyan ügyfélre nézve, aki nem találta a könyvet).
A BCC ábráról s = 1,2,3,4 esetén a Várható kölcsönzési költség/Év:

s = 1-re 26(.67) = $17.40
s = 2-re 26(.40) = $10.40
s = 3-ra 26(.23) = $ 5.98
s = 4-re 26(.095) = $ 2.47
A kiszolgálóhely fenntartása 11/2 = $5.50 költséget jelent évente. Így tehát s = 1,2,3,4 esetén a teljes éves várható költség:

s = 1	5.50 + 17.40 = $22.90
s = 2	2(5.50) + 26(.40) = $21.40
s = 3	3(5.50) + 26(.23) = $22.48
s = 4	4(5.50) + 26(.095) = $24.47

Ha még egy kiszolgálóhelyet létesítünk, akkor legfeljebb 26 (.095) = $2.47 a jó hírnév költsége. Ezek szerint s = 2 könyv az optimális.

6. Ha egy megrendelés megérkezik, akkor egy beérkezés történik, a kiszolgálási idő pedig annak az időnek felel meg, ameddig a pótlás beérkezik. A "kiszolgálóhely" tehát akkor foglalt, ha a pótlásra várakozik. Ha minde a négy kiszolgálóhely foglalt, akkor a megrendelés ellvész a rendszer számára. Ezért π_4 meghatározása a felafdat egy olyan $M/M/4/GD/4/\infty$ rendszerben, ahol $\lambda = 10$ megrendelés/hónap és $\mu = 1$ megrendelés/hónap. A 16. ábra alapján $\pi_4 = .65$, tehát a megrendelések 65%-a fog elveszni.

Áttekintő feladatok

1. Egy tipikus időbeosztás

```
--.----.----.------------.------------
20 40   40     120          120
```

Egy intervallum átlagos hossza tehát (20/340)20 + (80/340) (40) + (240/340)120 = 1620/17 = 95.29

A buszra várakozás átlagos időtartama = 1/2(1620/17) = 810/17 = 47.65

2a. λ = 15 diák/óra. 2 láncolt M/M/1 rendszerünk van μ_1 = 30 diák/óra, μ_2 = 30 diák/óra.

A beiratkozással eltöltött idő = 1/(30 - 15) = 1/15 óra
Díjbefizetéssel eltöltött idő = 1/(30 - 15) = 1/15 óra
Az irodában töltött teljes idő = 1/15 + 1/15 = 2/15 óra = 8 perc

2b. A következő öt percben a beérkezések átlagos száma (5/60)15 = 1.25 diák.

Annak valószínűsége, hogy a következő öt percben 2 diák érkezik =
$e^{-1.25}(1.25)^2/2! = .224$

2c. A következő három percben a beérkezések átlagos száma (3/60)15 = .75. Annak a valószínűsége, hogy a következő három percben nem lesz beérkező diák

$$e^{-.75}(.75)^0/0! = e^{-.75} = .472$$

2d. Most egy M/G/1 rendszerünk van. A kiszolgálási idő Erlang eloszlású, ahol R = 90 óránként és k = 2. Az átlagos kiszolgálási idő = 2(1/90) = 2/90 óra.
A kiszolgálási idő szórásnégyzete = $2/(90)^2$ = 2/8100 hour. ρ = 15(2/90) = .33, tehát

$$L_q = \frac{225(2/8100) + (.33)^2}{2(1 - .33)} = .12 \text{ diák}$$

$W_q = L_q/\lambda$ = .12/15 = .008 óra = .48 perc

3a. Legalább 3 kiszolgálóhelyre van szükség.

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Óra}} = (100 \text{ ügyfél/óra}) (\$6/\text{ügyfélóra}), W_q = 600W_q$$

s = 3 esetén a kiszolgálási költség = 3(20) = $60/óra. ρ = 100/135 = .74 és az interpoláció a P(j ≥ 3) = .56 értéket adja.

$$W_q = \frac{.56}{} = .016$$

3(45) - 100

Késedelmi költség/óra = 600(.016) = \$9.60/óra

Teljes költség/óra = \$69.60

Négy vagy több pult esetében a kiszolgálási költség \$80, vagy több, tehát 3 pult az optimális.

3b. Három pult esetén

$P(W_q > .083$ óra$) = .56e^{-135(.26)(.083)} = .03 < 5\%$, azaz csak 3 pultra van szükség.

4. Végtelen népesség mellett a rendszerben $\lambda = 500$ ügyvéd/év és $W = 35$ év. Feltéve, hogy elértük a stacionárius állapotot,átlagosan $L = 500(35) = 17{,}500$ ügyvéd lesz.

5. Az állapotot jelző érték legyen azoknak a diákoknak a száma, akik számára éppen csapolják a sört vagy a csapolásra várakoznak. Ekkor a Születés = aki megissza a sörét, a Halálozás = a csapoló diák.
Ekkor $\lambda_0 = 5(10/3)$, $\lambda_1 = 4(10/3)$, $\lambda_2 = 3(10/3)$, $\lambda_3 = (10/3)$
$\lambda_4 = 10/3$, $\lambda_5 = 0$. $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 30$
Egy gépjavítási problémánk van, ahol $K = 5$, $R = 1$, $\lambda = 10$ diák/óra és $\mu = 30$ diák/óra. $\rho = (10/3)/30 + 1/9$.
(16) vagy (52) szerint

$$\pi_1 = \binom{(5)}{(1)}(1/9)\pi_0 = .556\pi_0$$

$$\pi_2 = \binom{(5)}{(2)}(1/9)^2 2!\pi_0 = .247\pi_0$$

$$\pi_3 = \binom{(5)}{(3)}(1/9)^3 3!\pi_0 = .082\pi_0$$

$$\pi_4 = \binom{(5)}{(4)}(1/9)^4 4!\pi_0 = .018\pi_0$$

$$\pi_5 = \binom{(5)}{(5)}(1/9)^5 5! \ = .002\pi_0$$

Használjuk fel, hogy $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$, és így
$\pi_0 = .525$, $\pi_1 = .292$, $\pi_2 = .130$, $\pi_3 = .043$, $\pi_4 = .009$, $\pi_5 = .001$

5a. W_q értékét keressük.

$\lambda = 10/3\{5\pi_0 + 4\pi_1 + 3\pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4) = 14.26$ diák/óra.
$L_q = \pi_2 + 2\pi_3 + 3\pi_4 + 4\pi_5 = .247$
$W_q = L_q/\lambda = .247/14.23 = .017$ óra.

5b. $\pi_0 = .525$

5c. A hordó az idő $1 - \pi_0 = .475$ törtrészében foglalt. Ekkor átlagosan 30(.475) = 14.25 pohrat töltenek meg óránként. Átlagban tehát 500/14.25 = 35.09 óráig fog tartani, amíg 500 poharat megtöltenek.

6. Egy másológép esetében egy M/M/1 rendszerünk van, ahol $\lambda = 4$ ügyfél/óra és $\mu = 6$ ügyfél/óra. Ekkor W = 1/(6 - 4) = 1/2 óra és
Várakozási költség/Óra = (4 ügyfél/óra)($8/ügyfélóra)(1/2 óra) = $16.
Kiszolgálási költség/óra = $5 tehát
Teljes költség/óra = 16 + 5 = $21.

Két másológéppel M/M/2 rendszerünk van, ahol $\rho = 4/12 = .33$ és $P(j \geq 2) = .17$. Ekkor

$$W_q = \frac{.17}{12 - 4} = .02 \text{ óra} \quad W = .021 + 1/6 = .188 \text{ óra}$$

Várakozási költség/óra = (4 ügyfél/óra))$8/ügyfélóra)(.188 óra) = $6.02.
Kiszolgálási költség/óra = $10 Óra.
Teljes költség/óra = $10 + 6.02 = $16.02

3 másológép esetén M/M/3 rendszerünk van, ahol $\rho = 4/18 = .22$ és $P(j \geq 2) = .03$. Ekkor

$$W_q = \frac{.03}{18 - 4} = .002 \text{ óra} \quad W = 1/6 + .002 = .169 \text{ óra}$$

Várakozási költség/óra = (4 ügyfél/óra))$8/ügyfélóra)(.169 óra) = $5.41
Kiszolgálási költség/óra = $15/óra.
Teljes költség/óra = $15 + 5.41 = $20.41

Mivel négy fénymásoló költsége legalább $20, ezért 2 fénymásoló az optimális.

7a. M/G/1 rendszerünk van, ahol $\lambda = 4$ autó/óra, $\mu = 6$ $\sigma^2 = 0$. Ekkor

$$L_q = \frac{(2/3)^2}{2(1 - 2/3)} = 2/3 \text{ autó}$$

7b. x = az autómosáshoz szükséges idő. Ekkor $\rho = 4x$ és

$$W_q = \frac{(4x)^2}{4(2)(1 - 4x)} = 1/12$$

$16z^2(8 - 32x) = 1/12$, $192x^2 = 8 - 32x$ or $24x^2 + 4x - 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{112}}{48}$$

x = .137 óra = 8.2 perc

8. Eredetileg egy M/M/1/10 rendszerünk van, ahol $\rho = 21/24 = .875$. Ekkor

$$\pi_0 = \frac{1 - .875}{1 - (.875)^{11}} = .162 \quad \pi_{10} = (.875)^{10}(.162) = .043$$

A várható napi profitveszteség = \$20.21 autó/nap π_{10} = \$18.06

Ha kibérlik a telket c = 21. Ekkor

$$\pi_0 = \frac{1- .875}{1- (.875)^{21}} = .133 \quad \pi_{21} = (.875)^{21}(.133) = .008$$

A várható napi profitveszteség = \$20.21 autó/nap (.008) = \$3.36. A telek bérlése tehát 1806 - 3.36 + \$14.70 megtakarítást hoz naponta és csak napi 10 dollárba kerül. Ebből következően a telket ki kell bérelni és így a napi várható profitveszteség \$3.36.

9. Olyan születési-halálozási folyamatunk van, ahol az állapotot jelző szám az asztaltársaságok száma. (M/M/1/2 modelt is alkalmazhatunk.)
$\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\mu_0, = 0$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$. Ekkor
$\pi_1 = \pi_0$ és $\pi_2 = \pi_0$. Eszerint $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = 1/3$. Tehát
$L_q = (1)\pi_2 = 1/3$.
Összesen (1 asztaltársaság/óra)$(1 - \pi_2)$ = 2/3 asztaltársaság/óra kiszolgálása történik, így $W_q = L_q/(2/3) = 1/2$ óra.

10. Jelenleg egy M/M/2 Rendszerünk van, ahol $\lambda = 2/3$ ügyfél/óra és $\mu = 1$ ügyfél/óra. A (39)-(41) szerint

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 2\rho + 2\rho^2/(1 - \rho)} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

10a. Jelenleg $\rho = 1/3$. Ekkor $\pi_0 = (2/3)/(4/3) = .50$ és $\pi_1 = (2/3)(2/3)/(4/3) = .33$ A tulajdonosnak csak akkor kell felszolgálnia, ha két vagy több asztal foglalt, azaz az idő $1 - \pi_0 - \pi_1 = .17$ részében foglalt.

10b. Azt a ρ értéket keressük, amelyre $\pi_0 + \pi_1 = .90$.

$$\frac{1 - \rho}{\rho + 1} + \frac{2\rho(1 - \rho)}{\rho + 1} = .90$$

$-2\rho^2 + .1\rho + .1 = 0$, tehát $\rho = \dfrac{-.1 - \sqrt{.81}}{-4} = .25$

$\rho = .25$ ha $\lambda = 1/2$ ügyfél/óra

11. A 100 fős legésnységgel M/M/1 rendszerünk van, ahol $\lambda = 2/3$ hajó/nap és $\mu = 1$ hajó/nap. Ekkor $W = 1/(1 - 2/3) = 3$ nap.

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Nap}} = (2/3 \text{ hajó/nap})\ (\$1000/\text{hajónap})\ (3 \text{ nap}) = \$2000 \text{ nap}$$

$$\frac{\text{Kiszolgálási költség}}{\text{Nap}} = (100)(30) = \$3000$$

Teljes költség/Nap = 2000 + 3000 = \$5000.

140 munkással egy M/M/2 rendszert működtetünk, ahol $\lambda = 2/3$ hajó/nap.
$\mu = 2/3$ hajó/nap, $\rho = .5$. Ekkor $P(j \geq 2) = .33$ és

$$W_q = \frac{.33}{2(2/3) - 2/3} = 1/2 \text{ nap}, \ W = 1/2 + 3/2 = 2 \text{ nap}$$

$$\frac{\text{Késedelmi költség}}{\text{Nap}} = (2/3 \text{ hajó/nap})(2 \text{ nap})(\$1000/\text{hajónap}) = \$1333$$

$$\frac{\text{Kiszolgálási költség}}{\text{Nap}} = 30(140) = \$4200$$

A teljes költség/nap = \$4200 + \$1333 + \$5533.

A 100 főből álló nem kettéosztott legénység tehát a megfelelőbb.

12a. $e^{-200}(200)^{180}/180! = 1.6\text{x}10^{-84}$.

12b. $\lambda = 40$ munka/nap, $\mu = 42$ munka/nap $W = 1/(42-40) = .5$ nap

12c. $\pi_0 = 1 - \rho = 1/21 = .048$.

12d. $P(W_q < 2) = 1 - P(W_q \geq 2) = 1 - P(j \geq 1)e^{-42(2/42)2}$
$= 1 - (1 - .048)e^{-4} = .98$

13a. $L = 1/(2-1) = 1$ nap

13b. $W = 1$ nap

13c. $P(W > 2) = 1 - P(W \leq 2) = 1 - .865 = .135$

14. Egy BCC rendszerünk van. Határelemzéssel tudjuk meghatározni a kiszolgálóhelyek optimális számát. Legyen π_s annak a valószínűsége, hogy elveszítünk egy hívást, ha s operátort üzemeltetünk. Ekkor az egy órára eső teljes költség (\$30.00/hívás)(200 hívás/óra)π_s + 9s.

Egy újabb operátor hozzáadásával 9 dollárral nő a kiszolgálási költség és $6000(\pi_s - \pi_{s+1})$ költséget takarítunk meg. Tehát amikor
$6000\pi_s - \pi_{s+1}) \geq 9$, akkor az (s + 1)-edik operátorra is szükség van. Ha tehát
$\pi_s - \pi_{s+1} \geq .0015$, akkor kell az új operátor.

$\rho = 200/20 = 10.$

Az ábra alapján $\pi_{18} = .007$, $\pi_{19} = .004$, $\pi_{20} = .002$ és
$\pi_{21} = \pi_{22} = .000$. Most $\pi_{20} - \pi_{21} > .015$, de $\pi_{21} - \pi_{22} < 015$. Tehát
21 operátorra van szükség.

15. Az 1. szabály szerint $\lambda = 3 + 3 + 6$ ügyfél/óra és a rendszer M/G/1. Meg kell keresnünk a kiszolgálási idő szórásnégyzetét. Vegyük észre, hogy

$$E(S^2) = (3/6)\int_0^\infty t^2 = 10e^{-10t}\,dt + (3/6)\int_0^\infty t^2 20e^{20t}dt$$

$$= (1/2)2(1/100) + (1/2)2)(1/400) = 1/80 \text{ óra}^2$$

$E(S) = (1/2)6 + 1/2(3) = 4.5$ perc $= .075$ óra

Ekkor var $S = .0125 - (.075)^2 = .007$ (óra)^2 , $\rho = 6(.075) = .45$

$$L_q = \frac{(.007)6^2 + (.45)^2}{2(1 - .45)} = .41 \quad W_q = .41/6 = .068 \text{ óra}$$

Az 1. típusú ügyfél .068 + .10 = .168 órát tölt a rendszerben, míg a 2. típusú ügyfél .068 + .05 = 118 órát, az átlagos ügyfél tehát (1/2)(.168) + (1/2)(.118) = .143 órát tölt a rendszerben.

A 2. szabály szerint a (60) képletet alkalmazva, ahol $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ügyfél/óra, $\mu_1 = 10$ ügyfél/óra és $\mu_2 = 20$ ügyfél/óra

$E(S_1^2) = 2/100$ óra^2 $E(S_2^2) = 2/400$ óra^2 $a_0 = 0$ $a_1 = .3$ $a_2 = .45$

$$W_{q1} = \frac{\frac{3(2/100)}{2} + \frac{3(2/400)}{2}}{(1 - 0)\ \ (1 -.3)} = .054 \text{ óra}$$

3(2/100) 3(2/400)

$$W_{q2} = \frac{\dfrac{\quad}{2} + \dfrac{\quad}{2}}{(1 - .3)\ \ (1 - .45)} = .097 \text{ óra}$$

$W_1 = .054 + .10 = .154$ óra, $W_2 = .097 + .05 = .147$ óra,

a rendszerben töltött átlagos idő tehát (3/6)(.154) + (3/6)(.147) = .15 óra.

A 3. szabály szerint a 2. típusú ügyfélre

$$W_{q2} = \frac{\dfrac{3(2/100)}{2} + \dfrac{3(2/400)}{2}}{(1 - 0)\ \ (1 - .15)} = .044 \text{ óra}$$

Az 1. típusú ügyfélre

$$W_{q1} = \frac{\dfrac{3(2/100)}{2} + \dfrac{3(2/400)}{2}}{(1 - .15)\ (1 - .45)} = .080 \text{ óra}$$

$W_1 = .080 + .10 = .18$ óra, $W_2 = .044 + .05 = .094$ óra

Az átlagos rendszerben töltött idő = (3/6)(.18) + (3/6)(.094) = .137 óra.

Tehát a 3. szabály (a 2. típusú ügyfeleknek megszakítás nélküli prioritásuk van az 1. típusú ügyfelekkel szemben) adja a legrövidebb átlagos időtartamot, a leghosszabb időtartammal pedig a 2. szabály bír.

16. Olyan születési-halálozási folyamatunk van, ahol $\lambda_0 = 30$, $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 0$, $\mu_1 = 60$. $\mu_2 = 120$. A stacionárius valószínűségekhez $\pi_1 = .5\pi_0$, π_2, $\pi_0/8$, $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$.

$\pi_0 = 8/13$, $\pi_1 = 4/13$, $\pi_2 = 1/13$

16a. Anak a valószínűsége, hogy mindkét vonal szabad $\pi_0 = 8/13$. Anak a valószínűsége, hogy mindkét vonal foglalt $\pi_2 = 1/13$. Annak a valószínűsége, hogy egy vonal szabad $\pi_1 = 4/13$.

16b. $0\pi_0 + 1\ \pi_1 + 2\pi_2 = 6/13$ vonal.

16c. $30\ \pi_2 = 30/13$ hívás/óra.

17. Legyen CNC = A főiskolai mentő nem-főiskolai hívásra megy ki
CC = A főiskolai mentő főiskolai hívásra megy ki
CI = A főiskolai mentő szabad
DNC = A belvárosi mentő nem-főiskolai hívásra megy ki

DC = A belvárosi mentő főiskolai hívásra megy ki
DI = A belvárosi mentő szabad

A lehetséges állapotok (1-től 9-ig számozva):
1. állapot: (CNC, DNC) 2. állapot: (NC, DC) 3. állapot: (CNC, DI)
4. állapot: (CC, DNC) 5. állapot: (CC, DC) 6. állapot: (CC, DI)
7. állapot: (CI, DNC) 8. állapot: (CI, DC 9. állapot: (CI,DI)

Felhasználva a bemenő gyakoriság = kimenő gyakoriság elvét a π_1, ... π_9 valószínűségekre a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$(8.57 + 15)\pi_1 = 4\pi_3 + 4\pi_7$ (1. állapot)
$(8.57 + 12)\pi_2 = 3\pi_3 + 4\pi_8$ (2. állapot)
$(8.57 + 7)\pi_3 = 15\pi_1 + 12\pi_2$ (3. állapot)
$(15 + 15)\pi_4 = 4\pi_6 + 3\pi_7$ (4. állapot)
$(15 + 12)\pi_5 = 3\pi_6 + 3\pi_8$ (5. állapot)
$(15 + 7)\pi_6 = 15\pi_4 + 12\pi_5 + 3\pi_9$ (6. állapot)
$(7 + 15)\pi_7 = 8.57\pi_1 + 15\pi_4 + 4\pi_9$ (7. állapot)
$(7 + 12)\pi_8 = 8.57\pi_2 + 15\pi_5$ (8. állapot)
$(3 + 4)\pi_9 = 8.57\pi_3 + 15\pi_6 + 15\pi_7 + 12\pi_8$ (9. állapot)
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_8 + \pi_9 = 1$

Az egyenletrendszert megoldva: $\pi_1 = .03$, $\pi_2 =.008$, $\pi_3 = .035$, $\pi_4 = .029$, $\pi_5 = .014$, $\pi_6 = .111$, $\pi_7 = .143$, $\pi_8 = .015$, $\pi_9 = .614$.

17a. P(a belvárosi mentő szabad) = $\pi_3 + \pi_6 + \pi_9 = .76$
P(a belvárosi mentő foglalt) = 1 - .76 = .24

17b. P(a főiskolai mentő szabad) = $\pi_7 + \pi_8 + \pi_9 = .772$
P(a főiskolai mentő foglalt) = 1 - .772 = .228

17c. P(a híváskor mindekét mentő foglalt) = $\pi_1 + \pi_2 + \pi_4 + \pi_5 = .081$.
Tehát a hívások 8.1%-a vész el a rendszer számára.

17d.

Állapot	Egy főiskolai hívó várakozási ideje
3	5/2 perc
6	5/2 perc
7	4/2 perc
8	4/2 perc
9	4/2 perc

Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a "kiszolgálási idő" felére van szükség ahhoz, hogy a mentő az állomáshelyéről a hívóhoz érkezzen. Mindösszesen (1 - .081)3 = 2.76 főiskolai hívást fogadnak óránként.
$3(\pi_3 + \pi_6)$ hívó átlagosan 5/2 percet várakozik és $3(\pi_7 + \pi_8 + \pi_9)$ hívó átlagosan 4/2 percet várakozik. Így egy főiskolai hívó átlagosan

$$\frac{3(\pi_3 + \pi_6)2.5 + 3(\pi_7 + \pi_8 + \pi_9)^2}{2.76} = 2.08 \text{ percet}$$

várakozik.

Állapot	A nem-főiskolai hívó várakozási ideje
3	4/2 perc
6	4/2 perc

7 7/2 perc
8 7/2 perc
9 4/2 perc

Összesen 4(1 - .081) = 3.68 nem-főiskolai hívást fogadnak óránként. A hívásonkénti átlagos várakozási idő

$$\frac{4(\pi_3 + \pi_6 + \pi_9)2 + 4(\pi_7 + \pi_8)3.5}{3.68} = 2.25 \text{ perc}$$

Egy nem-főiskolai hívó tehát többetz vár, mint egy főiskolai hívó.

18. Legyen i = az úszók száma az uszodában. Tegyük fel, hogy az uszodában az úszók által eltöltött idő exponenciális eloszlást követ. ekkor egy olyan születési-halálozási folyamtunk van, ahol
$\lambda = \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 10$ és
$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 6$, $\mu_4 = 8$, $\mu_5 = 10$, $\mu_6 = 12$. A (16) alapján

$\pi_1 = 5\pi_0$' $\pi_2 = 12.5\pi_0$' $\pi_3 = 20.83\pi_0$, $\pi_4 = 26.04\pi_0$, $\pi_5 = 26.04\pi_0$, $\pi_6 = 21.70\pi_0$. Felhasználva azt a téynt, hogy a stacionárius valószínűségek összege egy, azt kapjuk, hogy $\pi_0 = .0088411$, $\pi_1 = .044$, $\pi_2 = .111$, $\pi_3 = .184$, $\pi_4 = .230$, $\pi_5 = .230$, $\pi_6 = .192$.

18a. $\pi_3 = .184$

18b. $L_s = \lambda(1 - \pi_6)W_s = 10(.808)(1/2) = 4.04$ úszó

18c. A 16. ábra felhasználásával $\rho = 10(1/2) = 5$ esetében $\pi_s < .05$ értékekre s = 9. Ehhez 5 sávra van szükség. Az úszási időtartamok exponencialitásának feltételezésével kaptuk ezt az eredményt.