

# Felvételi feladatok

Matematika

2015.

**1. Feladat**

(4+4+2+4 pont)

(a) Tekintsük az alábbi függvényt a számegeyenesen:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{ha } x \leq -\pi/4 \\ \frac{\operatorname{tg}(2x)}{3x} & \text{ha } -\pi/4 < x < 0 \\ x + \alpha & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) + \beta & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

(a) Léteznek-e olyan  $\alpha$  és  $\beta$  valós számok (ha igen, adja meg az összeset), amelyekre az  $f$  függvény folytonos az  $x = 0$  és  $x = 1$  helyeken? (Indokolja)

(b) Amennyiben a fenti  $f$  folytonos az  $x = 1$  helyen, akkor ott deriválható-e? (Indokolja)

(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

(d) Írja fel a  $g(x) = \ln x + 5/3$  függvény görbéjéhez húzható érintő egyenletét az  $(1, g(1))$  pontban.

**2. Feladat**

(3+3+3 pont)

Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) = 8x + \frac{1}{2x} + 3 \quad x \neq 0$$

(a) Adja meg  $f$  lokális szélsőérték helyeit és monotonitási szakaszait.

(b) Adja meg  $f$  konvex, konkáv szakaszait és inflexiós pontjait.

(c) Adja meg  $f$  értékészletét, ha  $-1 \leq x \leq -1/8$ .

### 3. Feladat

(5+6+4 pont)

(a) Legyen  $X$  olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{1}{12} & \text{ha } -1 < x \leq 1 \\ \frac{3}{12} & \text{ha } 1 < x \leq 3 \\ \frac{6}{12} & \text{ha } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases}$$

Adja meg  $X$  értékészletét és várható értékét.

(b) Legyen  $X$  olyan valószínűségi változó, amelynek várható értéke  $E(X) = 8$ . Adja meg  $P(X \leq E(X))$  valószínűséget, ha

$X$  Poisson-eloszlású,

$X$  exponenciális eloszlású,

$X$  normális eloszlású,

(b) Igaz **(I)** vagy hamis **(H)**?

- Ha az  $A$  és  $B$  eseményekre  $A \subset B$  és  $A \neq B$ , akkor  $P(A) < P(B)$ .
- Ha az  $A$  és  $B$  eseményekre  $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ , továbbá  $P(A|B) = P(B|A)$ , akkor  $P(A) = P(B)$ .

#### 4. Feladat

(6+6 pont)

(a) Tekintsük az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$$

- Adja meg mindazon  $\alpha$  és  $\beta$  valós számokat, amelyekre az egyenletrendszernek van megoldása.
- Adja meg mindazon  $\alpha$  és  $\beta$  valós számokat, amelyekre az egyenletrendszernek nincs megoldása.

(b) Legyen  $D$  olyan  $3 \times 3$ -as szimmetrikus mátrix, amelynek sajátértékei a  $-1$ ,  $1$  és  $2$  számok, továbbá legyen  $b \in \mathbb{R}^3$  egy tetszőleges vektor.

- Hány megoldása van a  $D \cdot x = b$  lineáris egyenletrendszernek?
- Adjuk meg a  $D$  mátrix rangját!
- Létezik-e  $D^{-1}$ ?
- Adja meg az  $x^T \cdot Dx$  kvadratikus alak definittségét!
- Van-e szélsőértéke az  $f(x) = x^T \cdot Dx$  függvénynek?