

# Mesterszak felvételi feladatok

Matematika

2020. május 27.

**1. Feladat**

(4+4+2+4 pont)

(a) Tekintsük az alábbi  $f$  függvényt a számegyenesen:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{ha } x < 1 \\ x^2 + \alpha & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{ha } x = 2 \\ \frac{6}{x} & \text{ha } 2 < x \leq 3 \\ e^{-x} & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

(a) Adja meg az összes olyan  $\alpha$  valós számot, amelyre az  $f$  függvény folytonos az  $x = 1$  és az  $x = 2$  helyeken.

(b) Amennyiben  $f$  folytonos az  $x = 2$  helyen, akkor ott deriválható-e? (Indokolja!)

(c) Határozza meg a következő határértékeket:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$$

(d) Adja meg a fenti  $f$  függvényre a következő integrál értékét:

$$\int_2^{\infty} f(x) dx =$$

**2. Feladat**

(4+4 pont)

Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{x-1} \quad \text{ahol } x \neq 1$$

(a) Adja meg  $f$  monotonitási szakaszait, és helyi szélsőértékeit.

(b) Adja meg az  $f$  értékkészletét az  $-2 \leq x \leq 1/2$  zárt intervallumon.

### 3. Feladat

(4+3+3+2 pont)

Tekintsük a  $\xi$  valószínűségi változót. Adja meg a  $P(-1 \leq \xi \leq 8)$  valószínűséget, ha

- $\xi$  eloszlásfüggvénye

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq -2 \\ \frac{1}{12} & \text{ha } -2 < x \leq 1 \\ \frac{3}{12} & \text{ha } 1 < x \leq 5 \\ 1 & \text{ha } x > 5 \end{cases}$$

- $\xi$  olyan exponenciális eloszlású változó, amelyre  $M(\xi) = 2$ .
- $\xi$  olyan Poisson-eloszlású változó, amelyre  $P(\xi = 0) = e^{-7}$ .
- $\xi$  olyan normális eloszlású változó, amelyre  $M(\xi) = 4$  és  $D(\xi) = 3/4$ . (Eredményét a  $\Phi$  függvénnyel adja meg!)

#### 4. Feladat

(6+10 pont)

Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + \frac{1}{(x + y)^2} + z^2 - 4z + 2 \quad \text{ahol } x \neq -y$$

(a) Adja meg az  $f$  kritikus pontjait, és mindegyikről döntse el, hogy minimum, maximum vagy nyeregpont.

(b) Jelentse  $\mathbf{H}$  az  $f$  függvény Hesse-mátrixát egy kritikus pontban, és válaszoljon az alábbi kérdésekre:

- Adja meg a  $\mathbf{H}$  Hesse-mátrix rangját.
- Létezik-e a  $\mathbf{H}^{-1}$  inverz mátrix?
- Hány megoldása van a  $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  homogén lineáris egyenletrendszernek?
- Igaz-e, hogy  $\lambda = 2$  a  $\mathbf{H}$  sajátértéke?
- Határozza meg a  $\mathbf{H}$  Hesse-mátrix sajátértékeinek szorzatát.